Метод «Геометрии масс»: физика на службе математики

Понятие центра масс и его применение к решению простых геометрических задач

С. Б. Ковалёва,
учитель математики высшей категории
СШ № 37 г. Могилёва

В физике под материальной точкой понимают тело, размерами которого можно пренебречь при сравнении его с расстояниями до других тел, рассматриваемых в задаче. Для упрощения рассуждений такое «малое» тело рассматривают как материальную точку (т.е. считают, что вся масса тела сосредоточена в одной точке). Если в точке A сосредоточена масса m, то будем эту материальную точку обозначать через mA.

Рассмотрим два небольших шарика, имеющих массы m_1 и m_2, соединённых жёстким «невесомым» стержнем. На этом стержне имеется такая точка Z, что если подвесить всю систему в этой точке, то она будет в равновесии – ни один из шариков не «перевесит». Эта точка Z и есть центр масс двух рассматриваемых материальных точек с массами m_1 и m_2. Такая же картина наблюдается и для большего числа материальных точек. Если выбрать произвольную точку одного из соединяющих стержней и подвесить всю систему на ниточке, закреплённой в этой точке, то рассматриваемая система, вообще говоря, не окажется в состоянии равновесия, одна часть «перетянет». Но есть такая замечательная точка Z, для которой система останется в равновесии. С другой стороны, любая точка может стать центром масс, если на концах стержня поместить массы согласно правилу рычага. Такую точку Z называют *центром масс*. Для этого понятия применяются следующие принципы:

1. Всякая система, состоящая из конечного числа материальных точек, имеет центр масс и притом единственный.

2. Центр масс двух материальных точек расположен на отрезке, соединяющем эти точки; его положение определяется правилом рычага. Произведение массы материальной точки на расстояние от неё до центра масс одинаково для обеих точек.

3. Если в системе, состоящей из конечного числа материальных точек перенести в центр масс все массы, то от этого положение всей системы не изменится.

Вот и вся теория. Как видите, речь идёт о простых фактах из механики.

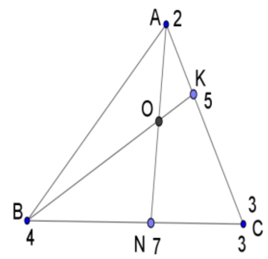
Геометрия масс является альтернативой теоремы Менелая. Геометрия масс более проста в использовании и требует только верное размещение масс в соответствии с указанными принципами.

Далее будем использовать следующие обозначения:

mA – материальная точка A (точка A вместе с числом m, которое ей сопоставлено); м.т. – материальная точка.

А теперь сравним решение задачи с помощью теоремы Менелая и геометрии масс.

Задача 1



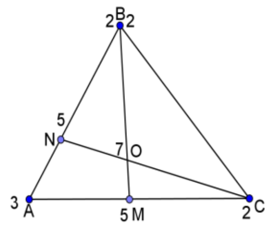
На сторонах AC и BC треугольника ABC взяты точки K и N, так, что CK:KA=2:3, CN:NB =4:3. В каком отношении точка пересечения отрезков AN и BK делит отрезок BK?

Решение теоремой Менелая: Заметим, что в треугольнике KBC секущая ON пересекает две стороны и продолжение третьей стороны треугольника. По теореме Менелая: $\frac{BO}{OK}\cdot\frac{KA}{AC}\cdot\frac{CN}{NB}=1.$ Пусть каждая часть x, тогда CK: KA=$2x:3x$ $(AC=5x)$ и CN: NB =$4x:3x$. Отсюда находим, что $\frac{BO}{OK}=\frac{5x\,3x}{3x\,4x}=\frac{5}{4}$.

Решение геометрией масс: По правилу рычага расположим в точках A, C, B массы 2, 3+3 и 4 , а их центры масс расположим соответственно в точках N и K. По свойству 3 имеем 5K и 7N , тогда по свойству 2 OK·5=OB·4, отсюда $\frac{BO}{OK}=\frac{5}{4}$.

Ответ: $\frac{BO}{OK}=\frac{5}{4}$.

Задача 2



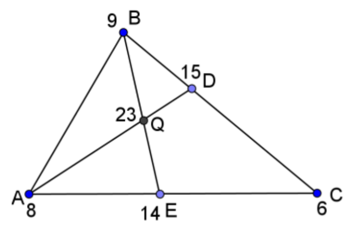
В треугольнике ABC на сторонах AB и AC взяты точки N и M соответственно, AN:NB=2:3. Отрезки CN и BM пересекаютсяв точке O так,

что BO: OM=5:2. Найдите CO : ON.

Решение: По правилу рычага расположим в точках A, M и B массы 3, 5 и 4, а их центры масс расположим соответственно в точках N, O. По свойству 3 m_N=5, m_O=7, а т.к. M – центр масс т.A и т.C, то m_C=2. Тогда по правилу рычага 2·OC=5·ON, отсюда $\frac{OC}{ON}=\frac{5}{2}$.

Ответ: $\frac{OC}{ON}=\frac{5}{2}$

Задача 3



Биссектрисы BE и AD треугольника ABC пересекаются в точке Q. Найдите площадь треугольника ABC, если

$S_{\Delta BQD}$ =1, 2·AC=3·AB, 3·BC=4·AB.

Решение: 1. Расположим в точках A, B, C массы 8, 9, и 6, а их центры масс расположим соответственно в точках D, Q,

E. Тогда $m_E=14$, $m_D=15$. Т.к. т.Q – центр масс т. A и т. D, то $m_Q=23$. Имеем $8\cdot AQ=15\cdot DQ$, отсюда $\frac{AQ}{DQ}=\frac{15}{8}$.

2. Т.к. т.D – центр масс т.B и т.C, по методу рычага $9\cdot BD=6\cdot DC$, отсюда $\frac{BD}{DC}=\frac{2}{3}$, пусть BD=2x, тогда BC=5x. Тогда $\quad=\frac{QD}{QA}$, т.к. $\frac{AQ}{DQ}=\frac{15}{8}$,

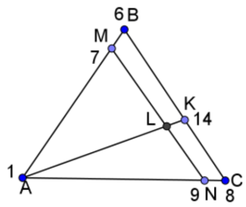
то $\frac{S\Delta BQD}{S\Delta BQA}=\frac{8}{15}$, из этого следует, что $S_{\Delta BQA}=\frac{15}{8}$ так как $S_{\Delta BQD}=1$.

3. $S_{\Delta BAD}=S_{\Delta BQD}+S_{\Delta BQA}$, то $S_{\Delta BAD}=\frac{23}{8}$. Тогда $\frac{S\Delta BAD}{S\Delta BAC}=\frac{BD}{BC}$,

$S_{\Delta BAC}=\frac{S\Delta BAD\cdot BC}{BD}$, $S_{\Delta BAC}=\frac{23}{8}\cdot\frac{5x}{2x}=\frac{115}{16}$.

Ответ: $S_{\Delta BAC}=\frac{115}{16}$.

Задача 4



В треугольнике ABC точка M принадлежащая стороне AB делит эту сторону в отношении 6 к 1, точка K принадлежащая стороне BC и делит её в отношении 3 к 4, точка N принадлежит стороне AC и делит её в отношении 8 к 1. AK пересекает MN в точке L. Найдите, в каком отношении точка L делит AK.

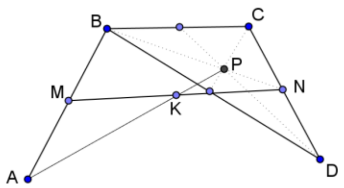
Решение: Расположим массы так, чтобы точки M, N, K были центрами масс. Для AB: 1A, 6B, значит 1A+6B=7M. Для AC: 1A, 8C, значит 1A+8C=9N. Для BC: 6B, 8C, значит 6B+8C=14K.

Заменим систему точек нашего треугольника на следующее множество точек 2A и 14K, 7M и 9N. Применим метод рычага для отрезка AK: 2AL=14LK, тогда $\frac{AL}{LK}=\frac{14}{2}=7$.

Ответ: $\frac{AL}{LK}=\frac{7}{1}$.

Решение олимпиадных задач методом «геометрия масс».

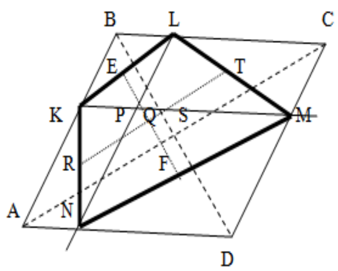
Задача 5



Из четырёх точек A, B, C, D никакие три не лежат на одной прямой, M и N – середины отрезков AB и CD, K – середина отрезка MN, P – точка пересечения медиан треугольника BCD. Докажите, что точки A, K, P лежат на одной прямой.

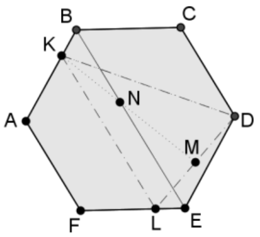
Доказательство: Точки M и N середины, значит, 1A, 1B, 1C, 1D. 1A+1B=2M, 1C+1D=2N, 2M+2N=4K. Точка P центр масс треугольника BCD, значит, 1B+1C+1D=3P. Итак, имеем систему точек 1A, 4K, 3P. Так как 1A+3P=4K, то точки A, P и K лежат на одной прямой AP.

Задача 6



Через точку P, расположенную внутри параллелограмма ABCD, проведены прямые, параллельные сторонам параллелограмма. Они пересекают стороны AB, BC, CD, DA соответственно в точках K, L, M, N. Пусть Q – точка пересечения средних линий четырёхугольника KLMN, а S – точка пересечения диагоналей параллелограмма. Докажите, что точка Q является серединой отрезка PS.

Доказательство: Прямые RT и EF средние линии четырёхугольника KLMN. Поэтому 1K, 1L, 1M, 1N. Тогда 1K+1N=2R, 1K+1L=2E, 1L+1M=2T,1M+1N=2F. Пусть У центр масс, тогда 2R+2T=4У и 2E+2F=4У. Это значит, что центр масс лежит на пересечении отрезков RT и EF, а значит, совпадает с точкой Q. КBLP параллелограмм (BC ║KM и AB║LN), значит, 1К+1L=2E и 1B+1P=2E. Аналогично NDMP параллелограмм. Для него выполняется 1M+1N=2F и 1D+1P=2F. Тогда для устойчивости системы точек B, P, D в точку P необходимо поместить две одинаковых массы. Итак, имеем 1B, 2P, 1D. 1B+1D=2S, 2S+2P=4Q. Значит, точки Q, S, P лежат на прямой PM и PQ= QS.



Задача 7

В правильном шестиугольнике ABCDEF на сторонах AB и EF отмечены точки K и L, соответственно, так, что AK: KB = EL:LF. Медиана KM треугольника KDL пересекает диагональ BE в точке N. Найдите отношение KN: NM.

(III тур республиканской олимпиады по математике 2013 год)

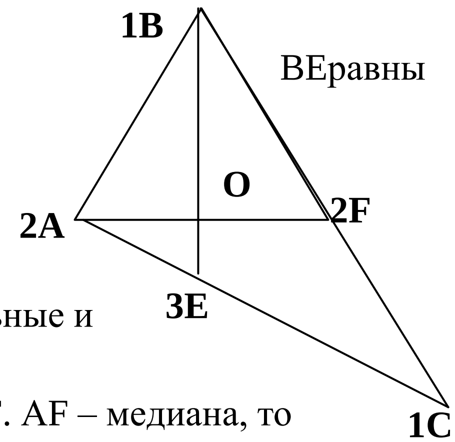
(Авторское решение Бриткиной Елены)

Решение: По условию AK: KB=EL: LF. Пусть AK: KB = k, тогда AK= k·KB. По принципу рычага размещаем в точке A массу 1, в точке B массу k. Тогда точка К является центром масс точек A и B. Значит, в точке К масса k+1. Аналогичные рассуждения проводим для точек E, F, L.

Имеем систему kE, 1F и (k+1)L. Так как по условию LM=MD, то в точке D размещаем массу, равную массе в точке L, т.е. k+1. Точка M – центр масс точек L и D. Значит, в точке M масса 2k+2. Тогда по принципу рычага имеем KN·(k+1)=NM·(2k+2). $\frac{KN}{NM}=\frac{2(k+1)}{k+1}=\frac{2}{1}$. Значит, KN: NM=2:1.

Ответ: KN: NM=2:1.

Задача 8



В треугольнике ABC медиана AF и биссектриса ВЕравны по 4 см и пересекаются под прямым углом.

Найдите стороны треугольника ABC. (Олимпиада БГУ)

(Авторское решение Бриткиной Елены)

Решение: Т.к. треугольники ABO и FBO прямоугольные и равные

(по катету и прилежащему углу), то AB=BF, AO=OF. AF – медиана, то BF=FC=AB. BE – биссектриса, значит, AB:BC=AE:EC=1:2.

Тогда размещаем массы:B 1, C 1. Следовательно, в точке F – 2.AO=OF, значит, размещаем массы: A2, O 4.Тогда в точке E – 3. По правилу рычага имеем:1 ·OB=3·

OE. Тогда OB:OE=3:1. Следовательно, BO=3см, OE=1см. Тогда по теореме Пифагора можно вычислить, что AB=$\sqrt{13}$см, BC=$2\sqrt{13}$см и AC=$3\sqrt{5}$ см.

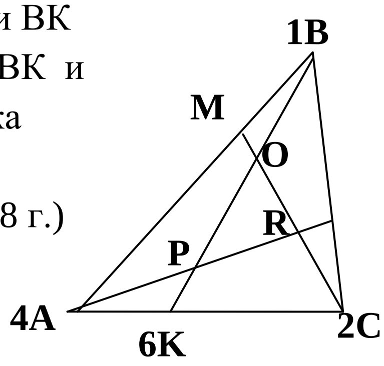
Ответ: AB=$\sqrt{13}$см, $BC = 2\sqrt{13}$ см, $AC = 3\sqrt{5}$см.

Задача 9

На сторонах AB, BC и AC треугольника ABC отмечены соответственно точки M, N и K так, что AM:MB=BN: NC=CK:KA=2:1. Отрезки AN и BK пересекаются в точке P, AN и CM пересекаются в точке R, BK и CM пересекаются в точке Q. Найдите площадь треугольника PQR, если площадь треугольника ABC равна S.

(II тур республиканской олимпиады по математике 2018 г.)

(Авторское решение)



Решение: Так как AM:MB=BN: NC=CK: KA=2:1,

то $S_{AKB}=S_{MBC}=S_{ANC}=\frac{1}{3}S_{ABC}$. $S_{PQR}=S_{ABC}-S_{ABP}-S_{CBQ}-S_{ACR}$.

По методу рычага имеем 4A, 2C и 1B, поэтому 6K. Значит, 1·BP = 6·KP.

Тогда BP: PK = 6:1 и BP: BK = 6:7. Следовательно, $S_{ABP}:S_{AKB}$ = 6:7, тогда $S_{ABP}=\frac{6}{7}S_{AKB}=\frac{6}{7}\cdot\frac{1}{3}S_{ABC}=\frac{2}{7}S_{ABC}$. Проведя аналогичные рассуждения, имеем $S_{CBQ}=S_{ACR}=\frac{2}{7}S_{ABC}$. Тогда $S_{PQR}= S - 3\cdot\frac{2}{7}\cdot S=\frac{1}{7}\cdot S$.

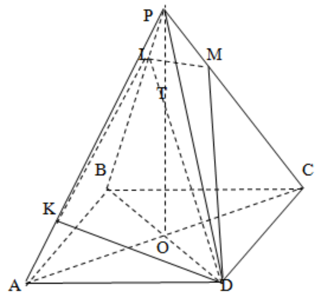
Ответ: $\frac{1}{7}$.

Применение геометрии массв пространстве

На примере следующих задач ясно, что геометрия масс прекрасно работает и в пространстве.

Задача 10

PABCD – правильная четырёхугольная пирамида, точка K лежит на PA, точка M лежит на PC так, что PK : KA=3:1, PM : MC=1:1, PO высота пирамиды. Плоскость KMD пересекает высоту PO в точке T, а ребро PB в L. Найти: PT: TO, PL: LB.

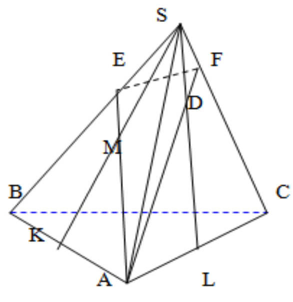


Авторское решение: Т.к. по условию пирамида PABCD правильная, значит, в основании – квадрат и 3A, 3B, 3C, 3D. Рассмотрим △APC.Так как PK:KA=3: 1, то по правилу рычага имеем 3A и 1P; так как PM: MC=1: 1, то по правилу рычага имеем 3C и 3P; имеем 3C и 3A, значит, 6O. Имеем систему материальных точек 6O, 1P+3P=4P, тогда PT·4=OT·6, значит, PT: OT=3: 2. Рассмотрим △BPD. Имеем систему материальных точек 3B, 4P, тогда имеем PL·4=BL·3, тогда PL: BL=3: 4.

Ответ: PT: OT=3: 2, PL: BL=3: 4.

Задача 11

SK и SL – медианы соответственно граней SAB и SAC треугольной пирамиды SABC. Точки M и D принадлежат этим медианам, так что SM=MK, SD:DL=1:2. Найти: $\frac{V_{ASEF}}{V_{ABEFC}}$.



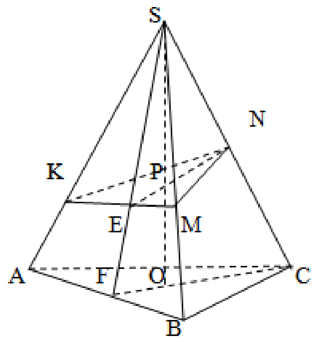
Авторское решение: Так как точки K и L середины рёбер AB и AC, то 1B, 1A и 2К. Аналогично 1A, 1C и 2L. По условию SM=MK, значит, 2К, 2S. SD:DL=1:2, тогда 2L, 4S. Тогда SE·2=BE·1, поэтому $\frac{SE}{EB}=\frac{1}{2}$, тогда $\frac{SE}{SB}=\frac{1}{3}$. Значит SF·4=FC·1, поэтому $\frac{SF}{FC}=\frac{1}{4}$, тогда $\frac{SF}{SC}=\frac{1}{5}$. Так как V=$\frac{1}{3}S_{осн.}H$, то $\frac{V_{ASEF}}{V_{ASBC}}=\frac{\frac{1}{3}H\cdot S_{SEF}}{\frac{1}{3}H\cdot S_{BSC}}=\frac{SE\cdot SF\cdot sina}{SB\cdot SC\cdot sina}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{15}$.

Тогда $V_{ABEFC}=V_{SABC}-V_{ASEF}=15\,частей-1\,часть=14\,частей.$

Поэтому $\frac{V_{ASEF}}{V_{ABEFC}}$=$\frac{1}{14}$.

Ответ: $\frac{V_{ASEF}}{V_{ABEFC}}$=$\frac{1}{14}$.

Задача 12



SABC – правильная треугольная пирамида, точка K принадлежит ребру SA, точка N ребру SC, точка M ребру SB так, что SK : KA=3:1,SN : NC=1:1,

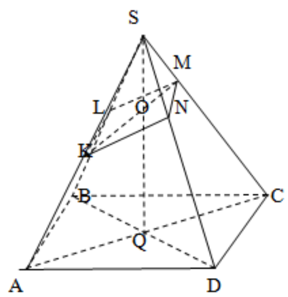
SM:MB=2:1, SO высота пирамиды. Плоскость KMN пересекает высоту пирамиды в точке P. Найти: SP: OP.

Авторское решение: т.к. по условию пирамида SABC правильная, значит, в её основании лежит правильный треугольник и 6A, 6B, 6C, тогда 18O. Так как SK : KA=3: 1, то по правилу рычага имеем 6A и 2S.Так как SN :NC=1: 1, то по правилу рычага имеем 6C и 6S. Так как SM : MB=2: 1, то по правилу рычага имеем 6B и 3S. Имеем систему материальных точек 18O, 2S+3S+6S=11S, тогда по T2 имеем SP·11=OP·18, тогда SP: OP =18: 11.

Ответ: SP: OP =18: 11.

Задача 13

SABCD – правильная четырёхугольная пирамида, точка K принадлежит ребру SA, точка M ребру SC, точка L ребру SB, плоскость KML пересекает ребро SD в точке N, а высоту пирамиды SQ в точке O.SK : SA=2:3, SL : SB=1:2, SM :SC=1:3, SC=n. Найти: SN.



Авторское решение: Т.к. по условию пирамида SABCD правильная, значит:в основании – квадрат и 2A, 2B, 2C,2D; SA=SB=SC=SB=n. Рассмотрим △ASC. SK:SA=2:3, значит, SK:KA=2:1, тогда по правилу рычага имеем 2A и 4S.SM: SC=1:3, значит, SM : MC=1:2, тогда по правилу рычага имеем 2C и 1S.2A и 2C, значит, 4Q. Имеем систему материальных точек 4Q, 4S+1S=5S, тогда 9O. Рассмотрим △BSD. SL :SB=1:2, значит, SL: LB= 1:1, тогда по правилу рычага имеем 2B и 2S.2D и 2B, значит, 4Q.4Q и 9O, значит 5S.

5S-2S=3S – в системе с точкой D.3S и 2D, значит, 5N, тогда по правилу рычага имеем SN:ND=2:3.SN:ND=2:3, значит, SN:SD= 2:5.SD=n, тогда SN= $\frac{2}{5}$n.

Ответ: SN=$\frac{2}{5}$n.

Литература

1. Балк, М. Б, Болтянский В. Г. Геометрия масс / Библиотека «Квант». – Выпуск 61. – М.: Наука,1987.

2. Ковалёнок, Н. В. Теорема Менелая и её применение / Н. В. Ковалёнок // Матэматыка праблемы выкладання. – № 3. – 2009.

3. Шарапов, Ю. П. Свойства площадей в задачах / Ю.П. Шарапов. – Мозырь: Белый ветер, 2012.