Текстовые задачи по математике – инструмент развития логического мышления

С. Н. Невар,
учитель математики
Ласицкой СШ Пинского района

Данная тема актуальна для наших детей в связи с тем, что современные школьники стали более развиты и им требуются не просто задачи на вычисление, а задачи, требующие в своём решении участия логического мышления. Такими задачами и являются текстовые задачи, а также задачи на комбинаторику и вероятность. А выявление методов обучения решению таких задач даёт возможность выбора наиболее оптимального метода для преподавания.

Для решения текстовых задач применяются три основных метода: арифметический, алгебраический и комбинированный. Рассмотрим каждый из этих методов.

I. Арифметический метод.

Первым этапом решения задач арифметическим методом является разбор условия задачи и составление плана её решения. Этот этап решения задачи сопровождается максимальной мыслительной деятельностью.

Вторым этапом является решение задачи по составленному плану. Этот этап решения проводится учащимися без особых затруднений и в большинстве случаев носит тренировочный характер.

Третьим важным этапом решения задачи является проверка решения задачи. Она проводится по условию задачи. Пренебрежение проверкой при решении задачи, замена её проверкой ответов снижает роль решения задачи в процессе развития логического мышления учащихся.

При решении текстовых задач арифметическим методом у учащихся вырабатываются определённые умения и навыки, которые в процессе дальнейшего обучения должны совершенствоваться и закрепляться.

Умения и навыки, которые формируются в процессе решения задач только арифметическим методом, можно разбить на две группы. К первой группе относятся умения и навыки, которые необходимы для дальнейшего изучения математики.

Все умения и навыки этой группы формируются в процессе решения задач на вычисление времени, т.е. тех задач, которые нет смысла решать алгебраически.

Вторая группа – это те умения и навыки, без знания которых можно решить все текстовые задачи алгебраическим методом, и в дальнейшем их незнание не будет пробелом в математическом образовании учащихся.

Эти умения и навыки, несомненно, представляют интерес. Но почти все из них можно отнести к числу умений и навыков, формирующихся у учащихся при решении нестандартных задач. Решение таких задач следует проводить систематически наряду с решением стандартных текстовых задач.

II. Алгебраический метод.

Под алгебраическим методом решения задач понимается такой метод решения, когда неизвестные величины находятся в результате решения уравнения или системы уравнений, решения неравенства или системы неравенств, составленных по условию задачи. Иногда алгебраическое решение задачи бывает очень сложным.

При решении задач алгебраическим методом основная мыслительная деятельность сосредоточивается на первом этапе решения задачи: на разборе условия задачи и составлении уравнений или неравенств по условию задачи.

Вторым этапом является решение составленного уравнения или системы уравнений, неравенства или системы неравенств.

Третьим важным этапом является проверка решения задачи, которая проводится по условию.

В связи с внедрением в школьную программу элементов высшей математики, с ускоренным развитием и внедрением во все сферы вычислительной математики большое значение имеет формирование у учащихся не отдельных специфических навыков, а тех умений и навыков, которые имеют дальнейшее приложение. К их числуотносятся умения и навыки, которые формируются в процессе решения задач алгебраическим методом.

III. Комбинированный метод.

Этот метод получается в результате включения в алгебраический метод решения задач решение, в котором часть неизвестных величин определяется с помощью решения уравнения или системы уравнений, неравенств или систем неравенств, а другая часть – арифметическим методом. В этом случае решение текстовых задач значительно упрощается количество идейно близких задач.

Можно выделить семь вопросов, которые дают верное направление решению задач разных типов.

Вопросы к задаче с комментариями к ним:

1. О каком процессе идёт речь? Какими величинами характеризуется этот процесс? (Количество величин соответствует числу столбцов таблицы).
2. Сколько процессов в задаче? (Количество процессов соответствует числу строк в таблице).
3. Какие величины известны? Что надо найти? (Таблица заполняется данными задачи; ставится знак вопроса).
4. Как связаны величины в задаче? (Вписать основные формулы, выяснить связи и соотношения величин в таблице).
5. Какую величину (величины) удобно выбрать в качестве неизвестной или неизвестных? (Клетки в таблице заполняются в соответствии с выбранными неизвестными).
6. Какие условия используются для составления “модели”? (Выписать полученную “модель”).
7. Легко ли решить полученное? (Если решить сложно, ввести новые переменные, использовать другие соотношения).

Роль текстовых задач в процессе обучения математике многообразна, и она сводится главным образом к следующим функциям:

1. Служит усвоению математических понятий и отношений между ними.
2. Учит школьников применению такого метода познания действительности, как моделирование.
3. Способствует более полной реализации межпредметных связей.
4. Развивает у учащихся способность анализировать, рассуждать, обосновывать; развивает логическое мышление школьников.
5. Прививает и укрепляет интерес школьников к математике.

Ребенок с первых дней занятий в школе встречается с задачей. С начала и до конца обучения в школе математическая задача неизменно помогает ученику вырабатывать правильные математические понятия, глубже выяснять различные стороны взаимосвязей в окружающей его жизни, дает возможность применять изучаемые теоретические положения. В то же время решение задач способствует развитию мышления учащихся.

В своей деятельности, обучая решению текстовых задач, особое внимание уделяю **алгоритму решения**:

1. Чтение задачи. (Ребёнок должен знать содержание задачи, внимательно прочитав её, вникнуть в условие.)

Первоначально в магазине было 300 кг картофеля. В первый день продали 50 кг, во второй день на 30 кг больше, чем в первый, а в третий день продали ½ часть картофеля, проданного во второй день. Сколько картофеля осталось в магазине?

2. Анализ задачи, её схематическая запись. (Всё проанализировать, составить схему.)

I–50 кг

II–? На 30 кг > 300 кг

III–? ½ часть

Осталось – ?

3. Поиск способа решения (установить связь между компонентами и выяснить, каким способом легче решать). Существует несколько способов решения задачи: по действиям, (установление связи между компонентами); с помощью уравнения.

4. Разработка плана решения

- ✓ Нахождение массы картофеля, проданного во второй день.
- ✓ Нахождение массы картофеля, проданного в третий день.
- ✓ Нахождение массы картофеля проданного за все три дня.
- ✓ Нахождение массы оставшегося картофеля.

5. Осуществление плана решения, при этом исследование задачи, анализ решения.

1. 50+30=80 (кг) картофеля продали во второй день.
2. 80 · ½=40 (кг) картофеля продали в третий день.
3. 50+80+40=170 (кг) картофеля продали за три дня.
4. 300-170=130 (кг) картофеля осталось.

6. Проверка результатов на достоверность (с использованием схематической записи задачи).

7. Ответ: 30 килограммов картофеля осталось.

Самой распространенной ошибкой при решении задач является отсутствие проверки результатов на достоверность, анализа решения. Например: зная, что первоначально в магазине было 300 кг картофеля, а после трех дней продажи осталось 450 кг. Ребенок, не задумываясь, пишет ответ.

Добиться развития мышления учащихся при восприятии учебного материала и его закреплении – вот одна из основных задач. Организую урок таким образом, чтобы умственная работа школьника была неразрывно связана с практической деятельностью. Каждый ученик принимает участие в процессе решения не только стандартных заданий, но и задач развивающего характера. Для формирования мышления использую различные **виды задач**:

I. Задача-шутка, занимательное задание, задание на перебор вариантов

1. Три товарища шли в школу на занятия во вторую смену и встретили еще двух товарищей – учеников первой смены. Сколько всего товарищей шло в школу?

2. В пещере старый пират разложил свои сокровища в 3 цветных сундука, стоящих вдоль стены: в один – драгоценные камни, в другой – золотые монеты, а в третий – оружие. Он помнит, что: красный сундук правее, чем драгоценные камни;оружие правее, чем красный сундук. В сундуке какого цвета лежит оружие, если зелёный сундук стоит левее, чем синий?

3. В ящике лежат шары: 5 красных, 7 синих и 1 зелёный. Сколько шаров надо вынуть, чтобы достать два шара одного цвета?

II. Задачи на переливание, логические задачи, ребусы, задачи на классификацию.

1. Для разведения картофельного пюре быстрого приготовления "Зеленый великан" требуется 1 л воды. Как, имея два сосуда емкостью 5 и 9 литров, налить 1 литр воды из водопроводного крана?

2. На скотном дворе гуляли гуси и поросята. Мальчик сосчитал количество голов, их оказалось 30, а затем он сосчитал количество ног, их оказалось 84. Сколько гусей и сколько поросят было на школьном дворе?

3. Сумма двух чисел – трехзначное число, которое оканчивается на 27. Одно из чисел оканчивается на ноль, но если стереть этот ноль, то мы получим другое число. Найдите сумму двух чисел. Чему равна сумма цифр этого числа?

III. Задача на аналогию и исключение лишнего.

Найдите лишнее число:

а) 18, 109, 3330, 54

б) 24, 42, 102, 3003

IY. Задача с геометрическим содержанием.

Вы знаете, что у треугольника может быть только один прямой угол. Бросьте вызов своим друзьям – предложите нарисовать треугольник с тремя прямыми углами.

Формируют пространственное и изобразительное умения школьников, расширяют кругозор.

Типы текстовых задач по способу решения.

Остановимся подробнее на видах текстовых задач и способах их решения. Рассмотрим те задачи, которые многие склонны решать с помощью уравнений, а они при этом имеют простые и порой очень красивые решения по действиям.

1. Нахождение чисел по их кратному отношению и сумме или разности (на «части»).

Знакомство с такими задачами надо начинать с тех, где речь идёт о частях в чистом виде. При их решении создаётся основа для решения задач на нахождение двух чисел по их отношению и сумме (разности). Учащиеся должны научиться принимать подходящую величину за 1 часть, определять, сколько таких частей приходится на другую величину, на их сумму (разность).

а) Для варенья на 2 части клубники берут 3 части сахара. Сколько сахара нужно взять на 3 кг клубники?

б) Купили 2700 г сухофруктов. Яблоки составляют 4 части, груши – 3 части, сливы – 2 части. Сколько граммов яблок, груш и слив в отдельности?

в) Девочка прочитала в 3 раза меньше страниц, чем ей осталось. Сколько страниц в книге, если она прочитала на 42 страницы меньше?

В дальнейшем ученики смогут решать и более сложные задачи.

Задача С.А. Рачинского. Я провел год в Москве, в деревне и в дороге - и притом в Москве в 8 раз больше времени, чем в дороге, а в деревне в 8 раз более, чем в Москве. Сколько дней я провел в дороге, в Москве и в деревне?

2. Нахождение двух чисел по их сумме и разности.

а) В двух пачках 50 тетрадей, причём в первой пачке на 8 тетрадей больше. Сколько тетрадей в каждой пачке?

Решение задач такого вида я обязательно начинаю с чертежа. Затем предлагаю уравнять величины. Ребята предлагают два способа: убрать из первой пачки или добавить во вторую. Так определяются основные два способа: через удвоенное меньшее число или удвоенное большее число.

Когда эти способы будут отработаны, уместно показать «старинный» способ решения задач такого вида. После вопроса «Каким образом можно уравнять стопки тетрадей, и при этом общее количество тетрадей не изменилось?» учащиеся догадываются, как это сделать, и делают вывод: чтобы найти меньшее число, надо из полусуммы вычесть полуразность, а чтобы найти большее число, надо к полусумме прибавить полуразность. Сильные учащиеся могут обосновать этот способ с помощью преобразования буквенных выражений:

С применением данного способа следующая задача решается в одно действие:

Среднее арифметическое двух чисел равно 3, а их полуразность равна 1. Какова величина меньшего числа?

Приём уравнивания применим и в задаче:

8 телят и 5 овец съели 835 кг корма. За это время каждому телёнку дали на 28 кг корма больше, чем овце. Сколько корма съел каждый телёнок и каждая овца?

3. Задачи на «предположение».

Задачи такого типа связаны с предполагаемыми действиями с предметами и величинами. В традиционной методике задачи такого типа имели и другие названия по наиболее известным задачам: на «синее и красное сукно», на «смешение II рода». Думаю, что самой известной среди задач на «предположение» является старинная китайская задача.

а) В клетке сидят фазаны и кролики. Известно, что у них 35 голов и 94 ноги. Узнать число фазанов и число кроликов.

- Представьте, что в клетке сидят только фазаны. Сколько у них ног?

- Почему ног меньше? (Не все фазаны, среди них есть кролики). На сколько ног больше?

- Если одного фазана заменить на кролика, то на сколько увеличится число ног? (На 2)

Очень интересно другое рассуждение, данное старыми мастерами методики математики и вызывающее у детей большой интерес.

- *Представим, что на верх клетки, в которой сидят фазаны и кролики, мы положили морковку. Все кролики встанут на задние лапки, чтобы дотянуться до морковки.*

Сколько ног в этот момент будет стоять на земле?2·35= 70(н.) Но в условии задачи даны 94 ноги, где же остальные?

- *Остальные не посчитаны — это передние лапы кроликов.*

- *Сколько их? 94 – 70 = 24(н.). Сколько же кроликов? 24:2 = 12 А фазанов? 35 – 12 = 23*

Интересной мне показалась задача из статьи И.В. Арнольда «Принципы отбора и составления арифметических задач» (1946 г.) про вагоны:

«Проезжая мимо станции, я заметил стоящий на станции товарный поезд из 31 вагона и услышал разговор смазчика со сцепщиком. Первый сказал: „105 осей всего пришлось проверить“. Второй заметил, что в составе много четырёхосных вагонов— втрое больше, чем двухосных, остальные трёхосные. На следующем перегоне я захотел, от нечего делать, подсчитать, сколько каких вагонов было в этом составе. Как это сделать?»

Арифметическое решение – проще алгебраического и требует отчётливого представления о том, что двухосные и четырёхосные входят в состав (в количественном отношении) определенными группами (по 4 вагона). Воображаемая «замена» всех вагонов трёхосными – обычный и уже хорошо знакомый учащимся приём.

Вспомогательным средством может служить *графическое линейное* отображение условий задачи.

4. Задачи на движение.

Данные задачи являются традиционно трудными. У учащихся должны быть хорошо сформированы такие понятия, как скорость сближения и скорость удаления. Когда ученики научатся решать такие задачи с помощью уравнения, им будет гораздо проще добраться до ответа. Но легче – не значит полезнее.

Приведу условия и решение нескольких задач.

а) Старинная задача. Из Москвы в Тверь вышли одновременно два поезда. Первый проходил в час 39 вёрст и прибыл в Тверь двумя часами раньше второго, который проходил в час 26 вёрст. Сколько вёрст от Москвы до Твери?

Решение:

1) На столько отстал второй поезд.
2) Скорость удаления.
3) Был в пути первый поезд.
4) Расстояние от Москвы до Твери.

б) Два самолёта вылетели одновременно из Москвы в одном и том же направлении: один – со скоростью 350 км/ч, другой – со скоростью 280 км/ч. Через два часа первый уменьшил скорость до 230 км/ч. На каком расстоянии от Москвы второй самолёт догонит первый?

Решение:

1) Скорость удаления.
2) На столько отстал второй самолёт.
3) Скорость сближения.
4) Столько времени потребуется, чтобы второй самолёт догнал первый.
5) На таком расстоянии до Москвы второй самолёт догонит первый.

в) Из двух городов, расстояние между которыми 560 км, вышли два автомобиля навстречу друг другу и встретились через 4 часа. Если скорость первого автомобиля уменьшить на 15%, а скорость второго увеличить на 20%, то встреча произойдёт тоже через 4 ч. Найти скорость каждого автомобиля.

Решение:

Примем за 100% или за 1 скорость первого автомобиля.

1) Скорость сближения.

2) Составляет скорость второго от скорости первого.

3) Приходится на скорость сближения.

4) Скорость первого автомобиля.

5) Скорость второго автомобиля.

г) Поезд за четверть минуты проходит мимо телеграфного столба, а за 50 с – мост длиною 0,7 км. Вычислить среднюю скорость движения поезда и его длину.

Решение: При решении данной задачи учащиеся должны понять, что, пройти мост – пройти путь, равный длине моста и длине состава, пройти мимо телеграфного столба – пройти путь, равный длине состава.

1) Поезд проходит путь, равный длине моста.

2) Скорость поезда.

3) Длина поезда.

5. Задачи на «бассейны».

Это ещё один тип задач, вызывающий и интерес, и трудности. Его можно назвать и задачами на совместную работу, к ним относится и часть задач на движение.

Название данного типа даёт не без известная старинная задача:

В городе Афинах был водоём, в который проведены 3 трубы. Одна из труб может наполнить бассейн в 1 ч, другая, более тонкая, в 2 ч, третья, ещё более тонкая, в 3 ч. Итак, узнай, за какую часть часа все три трубы вместе наполнят бассейн.

Решение:

1) (в./ч) – скорость заполнения через II трубу.

2) (в./ч) – скорость заполнения через III трубу.

3) (в./ч) – общая скорость.

4) (ч) – заполнят водоём 3 трубы.

Можно предложить детям ещё одно интересное решение:

За 6 часов через I трубу заполняется 6 водоёмов, через II трубу – 3 водоёма, через III трубу – 2 водоёма. Все трубы за 6 ч заполнят 11 водоёмов, соответственно на заполнение одного водоёма потребуется ч.

Аналогичное решение имеет следующая задача:

Лев съел овцу одни часом, волк съел овцу за два часа, а пёс съел овцу в три часа. Сколько бы они скоро, все три – лев, волк и пёс – ту овцу съели, сочти. (Математические рукописи 17 века).

Старинная задача. Дикая утка от южного моря до северного моря летит 7 дней. Дикий гусь от северного моря до южного моря летит 9 дней. Теперь дикая утка и дикий гусь вылетают одновременно. Через сколько дней они встретятся?

6. Текстовые комбинаторно-логические задачи

Так как в школьный курс математики введен раздел «Комбинаторика», необходимо на уроках в 5-8 классах в план урока включать задачи такого типа:

Семь разбойников нашли 55 золотых монет весом 306, 307, 308, ..., 360 г (всего 55). Каждый из разбойников останется доволен, если при дележе ему достанется не менее 2,5 кг золота. Можно ли разделить монеты так, чтобы все разбойники остались довольны?

Решение. Поскольку разбойников семеро, а монет 55, то хотя бы одному из них достанется не более семи монет: 55=7*7+6. Однако вес семи даже самых тяжелых монет равен: 360 г + 359 г +…+ 354 г = 2499 г $<$ 2,5 кг

Ответ: нет

7. Задача Ньютона.

Особый интерес у ребят вызывает задача о коровах, поедающих траву. Задача впервые была опубликована во «Всеобщей арифметике» И. Ньютона, но с той поры она не утратила своей актуальности и является одной из красивых арифметических задач, которую хотя и можно решить составлением уравнения, но намного красивее – сделать это с помощью последовательных рассуждений. Мне приходилось наблюдать, как над ней ломают голову старшеклассники, вводя несколько переменных, и в то же время легко разбираются в решении пятиклассники, если им подсказать идею решения.

Трава на лугу растёт одинаково густо и быстро. Известно, что 70 коров съели бы всю траву за 24 дня, а 30 коров – за 60 дней. Сколько коров съест всю траву на лугу за 96 дней?

Решение:

30 коров за 60 дней съедят всё поле и ту траву, которая на нём вырастет за 60 дней

70 коров за 24 дня съедят всё поле и ту траву, которая на нём вырастет за 24 дня.

Следовательно:

Всей травы на поле и той, что вырастет на нём за 60 дней, одной корове хватит на 30*60=1800 дней.

Всей травы на поле и той, что вырастет на нём за 24 дня, хватит одной корове на 70*24=1680 дней.

Отсюда травы, которая вырастет на поле за 60-24=36 дней, хватит одной корове на 1800-1680=120 дней

Значит, всей травы на поле и той, что вырастет на нём за 60+36=96 дней, хватит одной корове на 1800+120=1920 дней

А то, что одна корова съест за 1920 дней, за 96 дней съедят 1920/96=20 коров.

Ответ: За 96 дней всё поле съедят 20 коров.

В данной работе приведены примеры и разобраны лишь некоторые из огромного количества текстовых задач.

В завершение хотелось бы отметить, что необходимо приветствовать различные способы решения задач. Именно решение задач разными способами – чрезвычайно увлекательное занятие для учащихся различных возрастных групп. Интерес, любопытство, творчество, желание добиться успеха – это привлекательные стороны деятельности. Если ученик справляется с текстовыми задачами на уроках математики, то есть может проследить и пояснить логическую цепочку своего решения, дать характеристику всех величин, то он также успешно может решать задачи по физике и химии, он умеет сравнивать и анализировать, преобразовывать информацию на всех учебных предметах школьного курса.

Для организации оптимального сотрудничества учащихся на уроке использую парную, групповую формы работы, а также такие приемы, как «обмен мнениями», «помоги соседу», «давай вместе» и др. Работа в группах позволяет формировать коммуникативную и социальную компетенции. Различные формы работы дают возможность каждому высказать собственное мнение при обсуждении проблемы в небольшой группе, дети учатся слушать и понимать мысль одноклассников, защищать свою точку зрения в споре с другими группами.

Литература

1. **Василевский, А. Б.** Обучение решению задач по математике. – Минск, 1988.
2. **Демидова, Т. Е., Тонких А. П.** Теория и практика решения текстовых задач. – М.: Издательский центр «Академия», 2002.
3. **Ковалева, Г. И., Бузулина Т. И., Безрукова О. Л.** Математика: тренировочные тематические задания повышенной сложности с ответами. – Волгоград: Учитель, 2009.
4. **Кудряшова, Т. Г.** Решение нестандартных задач на уроках математики. – Воронеж: ВОИПКиПРО, 2008.
5. **Кузнецова, Л. В.** Сборник заданий для проведения письменного экзамена по алгебре за курс основной школы. – М.: ДРОФА, 2001.
6. **Лизинский, В. М.** Приемы и формы в учебной деятельности. – М.: Центр пед. поиск, 2002.
7. **Мельник, Н. В.** Развитие логического мышления при изучении математики. – М.: «Просвещение», 1997.