Нетрадиционные способы решения неравенств и задач

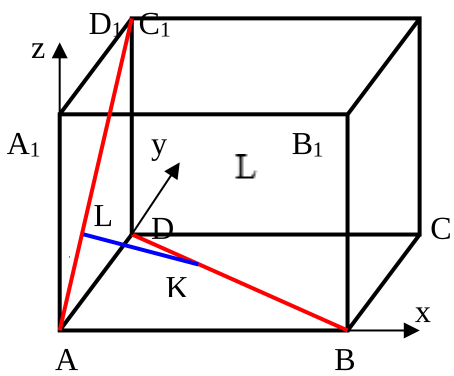
И. Н. Болейчук,

заместитель директора по учебной работе Крошинской СШ

Барановичского района

Задача1. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$: $AA_1=2$, $AB=3$, $BC=4$. Найдите расстояние между диагональю BD грани ABCD и диагональю AD_1 грани AA_1D_1D. Установите, в каком отношении общий перпендикуляр к этим прямым делит отрезки BD и AD_1.

Решение.



Введем систему координат с центром в точке A (см. чертеж). Найдем координаты нужных нам точек A, D_1, D и B: A(0,0,0), $D_1(0,4,2)$, D(0,4,0), B(3,0,0). Поместим на отрезках AD_1 и BD соответственно некоторые точки L и K. Эти точки могут перемещаться по «своим» отрезкам по своим законам движения независимо друг от друга. Пусть точка L в момент времени t=0 находится в точке A(0,0,0), а в момент t=1 – в точке $D_1(0,4,2)$, на отрезке AD_1 впроизвольный моментt точка будет иметь координаты ((0,0,0)·(1-t)+ (0,4,2)·t) или L(0, 4t ,2t). Аналогично получим координаты точки K(3q,4(1-q),0), q-время (независимое от t), в момент q=0 точка K находится в точке D(0,4,0), в момент q=1 – в точке B(3,0,0).

Расстояние между двумя скрещивающимися прямыми – это длина общего перпендикуляра к ним. Найдем длину отрезка LK в момент, когда вектор $\overline{LK}$ будет одновременно перпендикулярен векторам $\overline{AD_1}$ и $\overline{BD}$.

$\overline{LK}$=(3q, 4(1-q)-4t,-2t), $\overline{AD_1}$=(0,4,2), $\overline{BD}$=(-3,4,0).

Условие перпендикулярности векторов – это равенство нулю скалярного произведения. Для наших векторов имеем:

$\overline{LK} \cdot \overline{BD}$ =-9q +16(1-q) -16t = -25q-16t+16=0;

$\overline{LK} \cdot \overline{AD_1}$ = -16t +16(1-q) -4t = -20t -16q+16=0.

Решим систему уравнений методом сложения, умножив первое и второе уравнения на 4 и -5 соответственно.Получим: t =36/61; q =16/61.

Искомое расстояние – это длина вектора $\overline{LK}$ при найденных значениях t и q.

$LK^2 = 9 \cdot q^2 + 16\ ((1-q-t)^2 + 4 \cdot t^2$

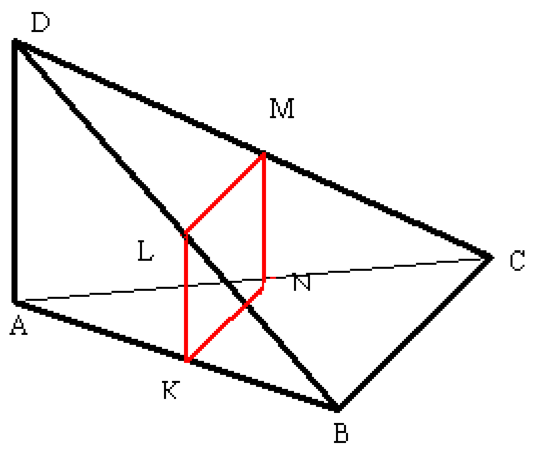
$LK^2 = 9 \cdot (16/61)^2 + 16 \cdot (9/61)^2 + 4 \cdot (36/61)^2 = 144 / 61;$

$LK=\frac{12}{\sqrt{61}}.$

Находим отношения:$AL:LD_1 =$ t:(1-t) = 36:25 и DK:KB = q:(1-q) = 16:45.

<u>Ответ</u>: $\frac{12}{\sqrt{61}}$,36:25, 16:45.

Задача 2.В пирамиде ABCD высота AD, равная 3, перпендикулярна плоскости основания. Ребро BC равно 4. Сечение пирамиды плоскостью представляет собой квадрат. Найти площадь этого квадрата.



<u>Решение.</u>

Четырехугольник в сечении пирамиды плоскостью будет представлять четырехугольник только в случае, если плоскость пересекает грани DCB и ABC.

Приведем в движение точкуD по отрезкам DC, DB, а точкуA– по отрезкамAB, AC. Промежуточные положения этих точек пусть будут M и L для D, а для A – это K и N. В момент времени t = 0 точки M и L находятся в D, а K и N – в точке A. При t = 1 точки M, N придут в точку C, а K, L – в точку B. Пройденные точками пути будут пропорциональны времени t и $(1-t)$, и по теореме, обратной теореме Фалеса, отрезки LM и KN всегда будут параллельны BC, кроме того, $LM=KN=BC \cdot t=4t$, а LK и NM параллельны AD и $LK=NM=AD \cdot (1-t)=3 \cdot (1-t)$. Т.к. AD и BC перпендикулярны, то KLMN – прямоугольник в любой момент времени t. Найдем тот момент, когда прямоугольник станет квадратом.

$3 \cdot (1-t)=4t$. Равенство верно при $t=3/7$. Сторона квадрата тогда будет равна 12/7, а площадь – 144/49.

Ответ: 144/49.