Алена Петкун,
ученица 11 класса Речицкого районного лицея,
С. М. Горский,
научный руководитель,
преподаватель кафедры математического анализа
Гомельского государственного
университета им. Франциска Скорины
Л. С. Аристова, учитель математики
Речицкого районного лицея

Рекуррентная последовательность.

Условие задачи.

Последовательность действительных чисел задается по формуле $x_{n+1} = \frac{x_n}{1-x_n+x_n^2}$, причем $x_1 > 0$.

1) Какое наибольшее значение может принимать x_n при $n > 1$.

2) Пусть $x_1 = \frac{1}{2}$, докажите, что для любого n x_n является правильной дробью, числитель которой на единицу меньше знаменателя.

3) Найдите наименьшее из чисел x_n, если оно существует.

4) Ответьте на пункты 1) и 3) если x_1 — произвольное действительное число.

5) Найдете явную формулу для x_n, при $x_1 = \frac{1}{2}$.

6) Существуют ли такие значения параметров a и b, что последовательность $x_{n+1} = \frac{x_n}{1-ax_n+bx_n^2}$ при $n > 1$ будет являться периодической для какого-либо значения x_1?

1) Какое наибольшее значение может принимать x_n при $n > 1$.

Решение для пункта 1:

Докажем, что для любого $n > 1$, $0 < x_n \leq 1$.

а) $x_1 > 0$ по условию, значит, база индукции есть. Так как $x_{n+1} = \frac{x_n}{1-x_n+x_n^2}$, а в знаменателе — квадратный трехчлен с отрицательным дискриминантом и со старшим коэффициентом равным 1, то $x_{k+1} > 0$, добавив предположение индукции, что $x_k > 0$, получим доказательство, что $x_n > 0$ для любого n.

Покажем, что $x_n \leq 1$ (при $n \geq 2$). Действительно, $x_n \leq 1 - x_n + x_n^2 \Leftrightarrow 0 \leq (1-x_n)^2$.Взяв $n = 2$, получим базу индукции. Сделав предположение, что $x_k \leq 1$ и воспользовавшись неравенством, получим доказательство.

б) Из а) следует, что наибольшее значение, если оно есть, равно 1. Пусть, для какого-то n $x_n = 1$, тогда $x_{n+1} = 1$, $x_{n+2} = 1$и т.д., т. к. рассмотрев уравнение $\frac{x_{n-1}}{1-x_{n-1}+x_{n-1}^2} = 1$, получаем, что $x_{n-1} = 1$, а, значит, все члены последовательности равны 1, включая x_1. Пусть $x_n \neq 1$ ни для какого n. Покажем, что тогда нет наибольшего значения. Из неравенств пункта 1) следует, что $x_n < 1$. Покажем, что последовательность, начиная со второго номера, возрастает.

$$-x_n(1-x_n) < 0,$$

$$1 - x_n + x_n^2 < 1,$$

$$1 < \frac{1}{1-x_n+x_n^2},$$

(домножим на x_n, имеем право, т.к. $x_n > 0$)

$$x_n < \frac{x_n}{1-x_n+x_n^2} = x_{n+1}.$$

Следовательно, если $x_n = 1$, то все члены последовательности будут равны 1. Если $x_n < 1$, то $x_n < x_{n+1}$.

Последовательность будет возрастать и стремиться к единице, но никогда не сможет достигнуть.

Ответ: $\max_{n\in\mathbb{N}} x_n = \begin{cases} 1, & x_1 = 1, \\ x_1, & x_1 > 1, \\ \textit{не существует}, & x_1 < 1. \end{cases}$

2) Пусть $x_1 = \frac{1}{2}$, докажите, что для любого n x_n является правильной дробью, числитель которой на единицу меньше знаменателя.

Решение для пункта 2:

$x_1 = \frac{1}{2}$ по условию. Пусть $x_n = \frac{a_n}{a_n+1}$, $x_{n+1} = \frac{\frac{a_n}{a_n+1}}{1-\frac{a_n}{a_n+1}+\left(\frac{a_n}{a_n+1}\right)^2} = \frac{a_n}{a_n+1} \cdot \frac{(a_n+1)^2}{a_n{}^2+a_n+1} = \frac{a_n(a_n+1)}{a_n(a_n+1)+1}$. Ч. Т. Д.

3) Найдите наименьшее из чисел x_n, если оно существует.

Решение для пункта 3:

Из пункта 1) следует:

1) при $x_1 = 1$, $\min_{n\in\mathbb{N}} x_n = 1$ (если один член последовательности равен 1, то все остальные равны 1).

2) при $x_1 < 1$, $\min_{n\in\mathbb{N}} x_n = x_1$, т. к. последовательность возрастает.

3) при $x_1 > 1$, $\min_{n\in\mathbb{N}} x_n = x_2$.

4) Ответьте на пункты 1) и 3) если x_1 — произвольное действительное число.

Решение для пункта 4:

Если $x_1 = 0$, то $x_n = 0$ для любого $n > 1$. Если для какого-то n $x_n = 0$, то $x_{n-1} = 0$ и индукцией вниз легко показать, что $x_1 = 0$.

Поскольку в знаменателе стоит квадратный трёхчлен с отрицательным дискриминантом и с положительным старшим коэффициентом, то из того что $x_1 < 0$, следует что $x_2 < 0$. Далее по индукции $x_n < 0$.

Покажем, что если $x_1 < 0$, то $x_{n+2} > x_{n+1}$.

Т. к. $x_n < 0$, то $x_n - 1 \neq 0$. Рассмотрим

$$\frac{x_n^2(x_n-1)^2}{(1-x_n+x_n^2)^2} > 0$$

$$x_n \frac{x_n^2 - x_n}{1-x_n+x_n^2} \frac{x_n - 1}{1-x_n+x_n^2} > 0$$

$$x_n\left(1 - \frac{1}{1-x_n+x_n^2}\right)\left(\frac{x_n-1}{1-x_n+x_n^2}\right) > 0$$

$$\left(x_n - \frac{x_n}{1-x_n+x_n^2}\right)\left(\frac{x_n^2}{1-x_n+x_n^2} - 1\right) > 0$$

$$(x_n - x_{n+1})(x_{n+1}x_n - 1) > 0$$

$$x_{n+1}x_n(x_n - x_{n+1}) > x_n - x_{n+1}$$

$$x_{n+1}x_n^2 - x_{n+1}^2 x_n > x_n - x_{n+1}$$

$$x_{n+1} + x_{n+1}x_n^2 > x_n + x_{n+1}^2 x_n$$

$$x_{n+1} - x_n x_{n+1} + x_{n+1}x_n^2 > x_n - x_n x_{n+1} + x_{n+1}^2 x_n$$

$$x_{n+1}(1 - x_n + x_n^2) > x_n(1 - x_{n+1} + x_{n+1}^2)$$

$$\frac{x_{n+1}}{1 - x_{n+1} + x_{n+1}^2} > \frac{x_n}{1 - x_n + x_n^2}$$

$$x_{n+2} > x_{n+1}$$

Таким образом, ответ:

$$\min_{n\in\mathbb{N}} x_n = \begin{cases} x_1, \ x_1 \le 0, \\ 1, \ x_1 = 1, \\ x_2, \ x_1 > 1, \\ x_1, 0 < x_1 < 1. \end{cases}, \ \max_{n\in\mathbb{N}} x_n = \begin{cases} x_1, \ \ x_1 > 1 \\ 1, \ \ x_1 = 1, \\ \textit{не существует}, \ 1 > x_1 > 0 \ \textit{или} \ x_1 < 0, \\ 0, \ \ x_1 = 0. \end{cases}$$

5) Найдете явную формулу для x_n, при $x_1 = \frac{1}{2}$.

Решение для пункта 5:

Случай $x_1 = \frac{1}{2}$. Пусть $a_1 = 1$, тогда $x_n = \frac{a_n}{a_n+1}$. Данная последовательность a_n значится как A007018 в OEIS (http://oeis.org/A007018), где для нее приведена явная формула:

$$a_n = \left[C^{2^n}\right], \qquad C = 1{,}5979102803187317833807011815 7\ldots$$

6) Существуют ли такие значения параметров a и b, что последовательность $x_{n+1} = \frac{x_n}{1-ax_n+bx_n^2}$ при $n > 1$ будет являться периодической для какого-либо значения x_1?

Решение для пункта 6:

Рассмотрим функцию:

$$f(x) = \frac{x}{1 - ax + bx^2}$$

Пусть $a = \frac{7}{2}, b = 4$. Тогда функция $f(x)$ примет вид:

$$f(x) = \frac{2x}{2 - 7x + 8x^2}$$

Найдя производную и приравняв её к 0, получим:

$x = \frac{1}{2}$ - точка максимума, а $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2$ - наибольшее значение данной функции.

Так как f непрерывна (так как знаменатель дроби не обращается в 0), то она переводит отрезок [0,2] в себя.

Из уравнения $f(x) = x$ следует, что $-x^2(8x-7) = 0$, т. е. $x = 0, x = \frac{7}{8}$.

Из уравнения $f\big(f(x)\big) = x$ следует, что $-x^2(8x-7)(4x^2-7x+2) = 0$, т. е. $x = 0, x = \frac{7}{8}, x = \frac{7-\sqrt{17}}{8}, x = \frac{7+\sqrt{17}}{8}$.

Из уравнения $f\Big(f\big(f(x)\big)\Big) = x$ следует, что

$$-x^2(8x-7)(8x^3-21x^2+13x-2)(32x^3-84x^2+45x-6) = 0$$

Уравнения $8x^3-21x^2+13x-2=0$ и $32x^3-84x^2+45x-6=0$ решаются очень тяжело, но поскольку они являются кубическими уравнениями, то они имеют корни. Непосредственной проверкой легко убедится, что

$x = 0, x = \frac{7}{8}, x = \frac{7-\sqrt{17}}{8}, x = \frac{7+\sqrt{17}}{8}$ корнями этих уравнений не являются. Так же не трудно убедится, что один из корней каждого из этих уравнений лежит на отрезке [1,5; 2].

Таким образом, уравнение $f\Big(f\big(f(x)\big)\Big) = x$ имеют корни, не являющиеся корнями уравнений $f\big(f(x)\big) = x$ и $f(x) = x$.

Теорема Шарковского. *Рассмотрим такой порядок на множестве натуральных чисел* $3 < 5 < 7 < \cdots < 2\cdot3 < 2\cdot5 < 2\cdot9 < \cdots < 4\cdot3 < 4\cdot5 < 4\cdot7 < 4\cdot9 < \cdots < 2^n\cdot3 < 2^n\cdot5 < 2^n\cdot7 < 2^n\cdot9 < \cdots < 8 < 4 < 2 < 1$.

Тогда если у непрерывной функции $f\colon [a;b] \to [a;b]$ *есть неподвижная точка степени k (то есть существует такое* x_0 $\underbrace{f\big(\ldots\big(f(x_0)\big)\ldots\big)}_{k \text{ раз}} = x_0$, $\underbrace{f\big(\ldots\big(f(x_o)\big)\ldots\big)}_{i \text{ раз}} \neq x_0$*, где* $1 \le i \le k-1$*),то у этой функции есть неподвижные точки всех степеней больших k в этом порядке.*

Тогда по теореме Шарковского функция $f(x) = \frac{2x}{2-7x+8x^2}$ имеет неподвижные точки любой натуральной степени. Отсюда следует, что если в качестве x_1, для нашей рекуррентной последовательности при $a = \frac{7}{2}, b = 4$, взять неподвижную точку степени k, то получим периодическую рекуррентную последовательность с длиной периода равным k.

Отметим, что данные значения параметров a и b не единственные. Можно, например, ещё взять $a = 7, b = 16$.

Результаты и направления дальнейшего исследования

В работе рассмотрены полностью пункты 1) – 6).

Дальнейшее исследование: оценить сверху и снизу последовательность

$x_{n+1} = \frac{x_n}{1-ax_n+bx_n^2}$ при $n > 1$. Найти явную формулу для x_n, при $x_1 = \frac{p}{q}$ $(p, q$— натуральные числа).

Решение пункта №5 в данный момент находится в стадии решения, именно: вывод явной формулы x_n, при $x_1 = \frac{p}{q}$ $(p, q$— натуральные числа). Так же будет добавлена значимость моей работы и прогрессий в целом. А так же для пункта №6, будут найдены другие числа a и b.

Татьяна Фурс
ученица 10 «В» класса
Л. С. Аристова,
руководитель,
учитель математики
Речицкого районного лицея

Загадки и тайны пятиугольников

Учебно-исследовательская работа

Содержание

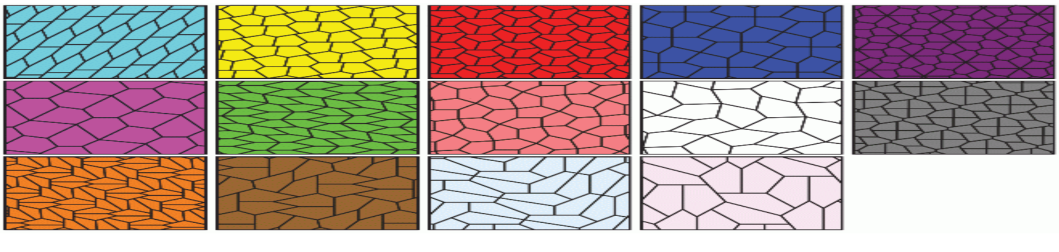
Введение

Пятиугольники в школьном курсе встречаются очень редко, однако геометрия вызывала и вызывает неизменный интерес художников и архитекторов. Например, гениальный французский архитектор XX столетия Ле Корбюзье отмечал, что окружающий нас мир является миром геометрии и что своими художественными впечатлениями человек обязан именно геометрии. А Произведения Леонардо да Винчи, убедительно свидетельствуют о том, что геометрия была и остаётся определяющей в вопросах красоты и гармонии. А замощение плоскости один из способов показать эту красоту и гармонию. Одной из фигур с которой это возможно, является пятиугольник Рейнхардта.

Пятиугольник одна и редчайших фигур встречающихся в природе. В моей предыдущей исследовательской работе(«Любопытные свойства необычного треугольника»), я рассматривала свойства равнобедренного треугольника с углом при вершине равным 108°.При решении задач произошла встреча с необычным пятиугольником правильным и равносторонним. Эти пятиугольники различны, ведь в правильном пятиугольнике все стороны равны и углы по 108°,а в равностороннем пятиугольнике углы не равные. Вопрос о замощении плоскости такими пятиугольниками оставался открытым…

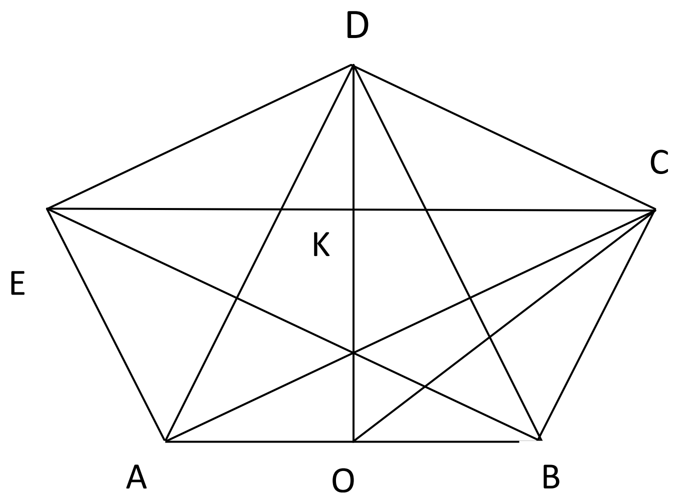
На данный момент существует четырнадцать видов пятиугольников которыми можно замостить плоскость. Подробней мы рассмотрим один из них. Интересна их область применения.

Цель работы: изучить пятиугольники, их свойства, применение свойств к решению задач и в окружающем мире



1.Вводная задача

ABCD равносторонний пятиугольник со стороной равной ***a,*** *найти длины диагоналей пятиугольника.*



Решение

1) Рассмотрим треугольник OBC, по теореме косинусов получаем:

$BC^2=OB^2+OC^2-2OB\cdot OC\cos 45°$, так как сторона пятиугольника равна **a** то имеем:

$a^2=\frac{a2}{4}+OC-2\cdot\frac{a}{2}OC\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$; $4OC^2-2\sqrt{2}\,aOC-3a^2=0$;

так как OC= OE, то $OC=OE=\frac{\sqrt{2}\,a\cdot(1+\sqrt{7})}{4}$;

2) Пусть K- точка пересечения отрезков OD(ось симметрии) и EC, т.к. треугольник OCE прямоугольный и равнобедренный , поэтому

$OK=KC=\frac{OC}{\sqrt{2}}$; $KC=KE=KO=\frac{a(1+\sqrt{7})}{4}$самая большая диагональ(горизонтальная)равна:

$EC=\frac{a\cdot(1+\sqrt{7}).}{2}$

3) По теореме Пифагора из треугольника KCDполучаем

$DK^2=CD^2-KC^2=a^2-\frac{a^2\cdot(1+\sqrt{7})}{16}=\frac{a^2\cdot(8-2\sqrt{7})}{16}$, $DK=\frac{a\cdot(\sqrt{7}-1)}{4}$;

Из треугольника ODB по теореме Пифагора $BD^2=BO^2+OD^2$;где$OD=DK+KO=$
$\frac{a(\sqrt{7}-1)}{4}+\frac{a(1+\sqrt{7})}{4}=\frac{a\sqrt{7}}{2}$, тогда$BD^2=BC^2+CD^2=a^2+a^2$,

$DB=AD=a\sqrt{2}$.

4) $AK^2 = AO^2 + KO^2$, AC=AK+KC, последняя пара диагоналей принимает вид

AC=BE=$\frac{a\sqrt{3+\sqrt{7}}}{\sqrt{2}}$=$\frac{a}{2}\sqrt{6+2\sqrt{7}}$.

Ответ: OC=OE=$\sqrt{2}$ a(1+$\sqrt{7}$)/4,EC= a(1+$\sqrt{7}$)/2, DB=AD=a$\sqrt{2}$,

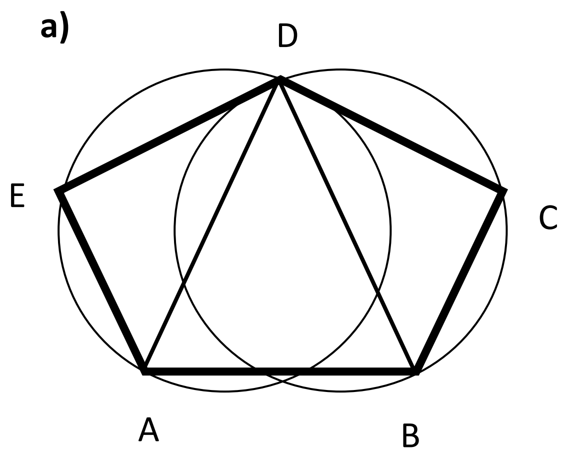
AC=BE=$\frac{a}{2}\sqrt{6+2\sqrt{7}}$.

2.Окружности и пятиугольникРейнхардта

Пятиугольник Рейнхардт- равносторонний пятиугольник, имеющий два прямых угла , которые не являются смежными.

Дан пятиугольник Рейнхардта ,докажите, что не существует описанной и вписанной в него окружностей.

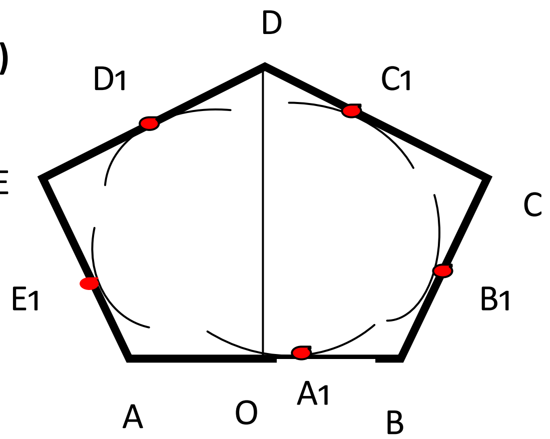
Доказательство



а) Если предположить, что такая окружность существует , то окружность, проходящая через точкиB,C,Dдолжна иметь центр на диагонали BD,а окружность, проходящая через точки A,E,Dдолжна иметь центр на диагонали AD,что невозможно.

Доказано.

b)



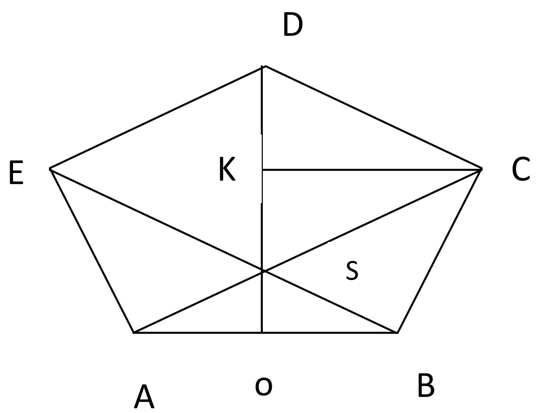
Доказательство

b) Пойдём от противного,т.е. окружность вписана в пятиугольник и касается всех его сторон в точках A1,B1,C1,D1,E1 (A1$\in$AB, B1$\in$BC,C1$\in$DC,D1$\in$ED,E1$\in$ EA).Пятиугольник Рейнхардта имеет единственную ось симметрии OD.Центр вписанной окружности должен лежать на биссектрисе угла D, т.е. на OD.При симметрии относительно ODпятиугольник и окружность отображаются в себя, поэтому DC1=DD$_1$,CC1=ED1,CB1=EE1,BB1=AE1,A1B=A1A. Используяравенство двух касательных, проведённых из точки к окружность и равенство сторон пятиугольника, получаем равенство всех отрезков, проведённых из точек касания в ближайшие вершины пятиугольника. Следовательно, углы пятиугольника равны между собой , что невозможно.

Доказано.

3.Вычисление длины

Дан равносторонний пятиугольник AB=10,AC$\cap$BE=S. Найти SD.



Решение

Т. К. DS=DO-SO;гдеDO=$\frac{AB\sqrt{7}}{2}$ (см. задача 1)

Тогда еслиAC$\cap$BE=S,тогда$\triangle$ AOS~$\triangle$ CKS(по двум сторонам и углу между ними),$\frac{SO}{SK}=\frac{AO}{KC}=\frac{AS}{CS}$=k

$\frac{SO}{SK} = \frac{AO}{KC} = \frac{SO}{KO-SO} = \frac{\frac{AB}{2}}{KC}$ следовательно $SO = \frac{(KO-SO)\cdot\frac{AB}{2}}{KC}$;

$KC \cdot SO = (KO-SO) \cdot \frac{AB}{2}$; где $KC=AB\cdot\frac{1+\sqrt{7}}{4}$, KO=KC(см.задача1)

$SO\cdot(AB\frac{1+\sqrt{7}}{4})=\frac{AB}{2}\cdot(\frac{AB(1+\sqrt{7})}{4}-SO)$;

$\frac{SO\cdot(AB+AB\sqrt{7})}{4}=AB^2+AB^2\sqrt{7}-4AB\cdot SO$;

$8SO\cdot AB+8SO\cdot AB\sqrt{7}=4AB^2+4AB^2\sqrt{7}-16AB\cdot SO$;

$8SO\cdot AB\,(3+\sqrt{7})=4AB\cdot(AB+AB\sqrt{7})$;

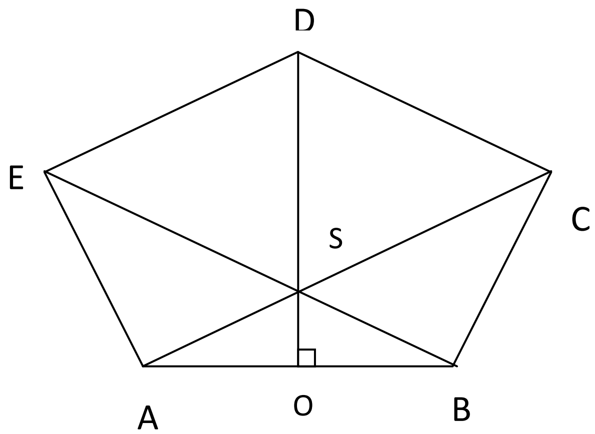
$SO=\frac{AB+AB\sqrt{7}}{2(3+\sqrt{7})}=\frac{AB\cdot(1+\sqrt{7})}{2(3+\sqrt{7})}=\frac{(AB+AB\sqrt{7})(3-\sqrt{7})}{4}=\frac{2AB\cdot(\sqrt{7}-2)}{4}=\frac{AB\cdot(\sqrt{7}-2)}{2}=5(\sqrt{7}-2)$;

Тогда $DS=5\sqrt{7}-5\sqrt{7}+10=10$, что есть сторона пятиугольника.

Ответ: 10.

4. Градусная мера угла

ABCDE- пятиугольник, сторона, которого равна **a**,*.Найти* $\angle EDC$, $\angle BAC$, $\angle ECB$, $\angle SDC$.



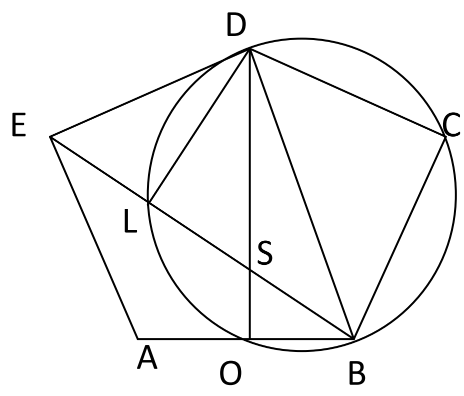
Решение

Рассмотрим ΔASO. Пусть $\angle BAC=\alpha$, тогда $\angle ASO=90°-\alpha$ (OD- ось симметрии) $\angle ASO=\angle CSD$(вертикальные), т.к. ΔSDC- равнобедренный(SD=SC, с.м. задача 3).Поэтому $\angle SDC=2\alpha$, $\angle EDC=4\alpha$, тогда имеем, что $\angle EDC=4\angle BAC=2\angle ECB$

Ответ. $\angle BAC=\alpha$, $\angle SDC=2\alpha$, $\angle EDC=4\alpha$, $\angle ECB=\angle SDC$

5.Окружность и пятиугольник

Биссектриса $\angle EDS$ пересекает диагональ BE в точке L, которая принадлежит окружности с диаметром BD.



Доказательство:

Δ EDS-равнобедренный т.к. ED=DS(см. задачу 3),

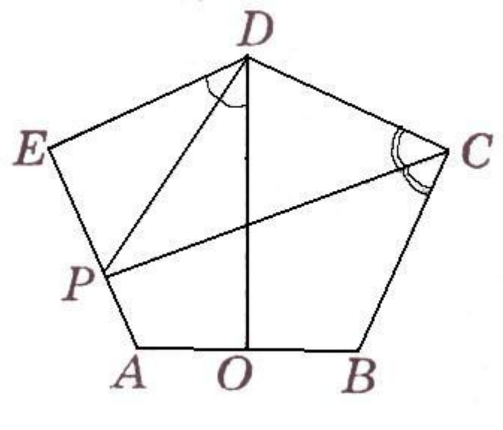
то $\angle DLB=90^0$(DL-биссектриса, медиана, высота),

а $\angle DLB=90^0$опирается на диаметр-DB, следовательно,L лежит на окружности.

Доказано.

6.Биссектриса и пятиугольник

Биссектриса $\angle C$ и биссектриса $\angle ODE$ пересекаются в точке P, лежащей на стороне AE пятиугольника.



Доказательство:

Рассмотрим декартову систему координат с началом в точке O и пусть лучи OB, OD являются осями координат соответственно.

$\vec{BD}\left\{\frac{-a}{2};\frac{a\sqrt{7}}{2}\right\}$ является перпендикулярным к биссектрисе CP. Используя уравнение прямой с нормальным вектором

$a_1 (x-x_0) + b_1(y-y_0) =0$,

получаем уравнение биссектрисы CP

$$x-\sqrt{7}y+\frac{3}{2}a=0.$$

Аналогично, $\vec{BE} \perp DP$. Уравнение биссектрисы DP:

$$(3+\sqrt{7})x-(1+\sqrt{7})\cdot y+\frac{a\sqrt{7}}{2}(1+\sqrt{7})=0.$$

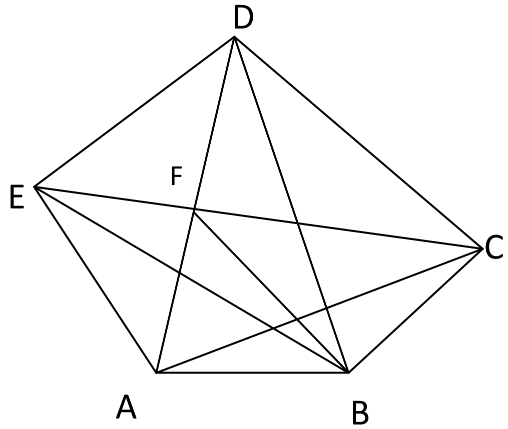
$$P\left(-a(\sqrt{7}-2);\frac{a(\sqrt{7}-2)}{2}\right)$$

Уравнение прямой AE: $(1+\sqrt{7})\bullet(x+\frac{a}{2})-(1-\sqrt{7})\bullet y=0.$

Координаты точки удовлетворяют уравнению прямой, следовательно, биссектрисы указанных углов пересекаются на стороне AE пятиугольника.

7.Площади треугольников и пятиугольника

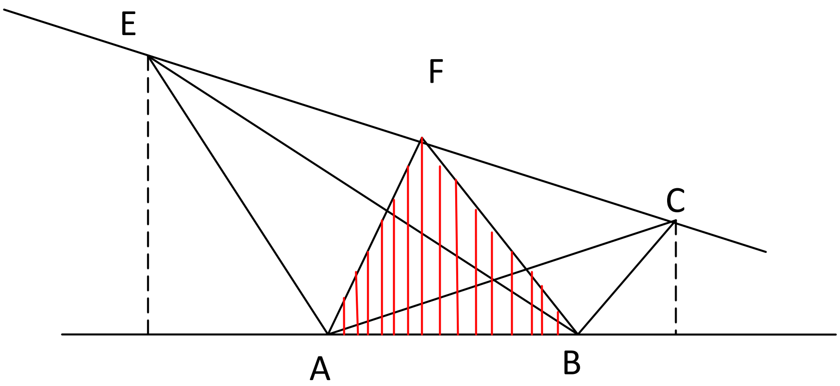
В выпуклом пятиугольнике каждая диагональ отсекает треугольник. Докажите, что сумма площадей этих треугольников больше площади пятиугольника.



Доказательство

Пусть дан произвольный выпуклый пятиугольник. Обозначим его вершины буквами ABCDE так, чтобы площадь треугольника ABC была наименьшей из площадей треугольников ABC,BCD,CDE,DEA и EAB.

Пусть F- точка пересечения ADи EC. Поскольку точка F лежит на отрезке EC,площадь S_{ABF} заключена между S_{ABE} и S_{ABC}.Так как , мы знаем , что $S_{ABC} \leq S_{ABE}$.Потому $S_{ABF} \leq S_{ABE}$.



Аналогично, поскольку точка F лежит на AD и $S_{ABC} \leq S_{BCD}$,то $S_{BCF} \leq S_{BCD}$.

Но треугольники AED,EDC, ABF и BFC покрывают пятиугольник (кусок EFD- дважды).Поэтому сумма их площадей больше S_{ABCD}.Тем более

$S_{ABE}+S_{AED}+S_{EDC}+SBCD \geq S_{ABCDE}$.

Это показывает, что отношение площадей пяти треугольников к площади пятиугольника может быть очень близко к 1.

Доказано.

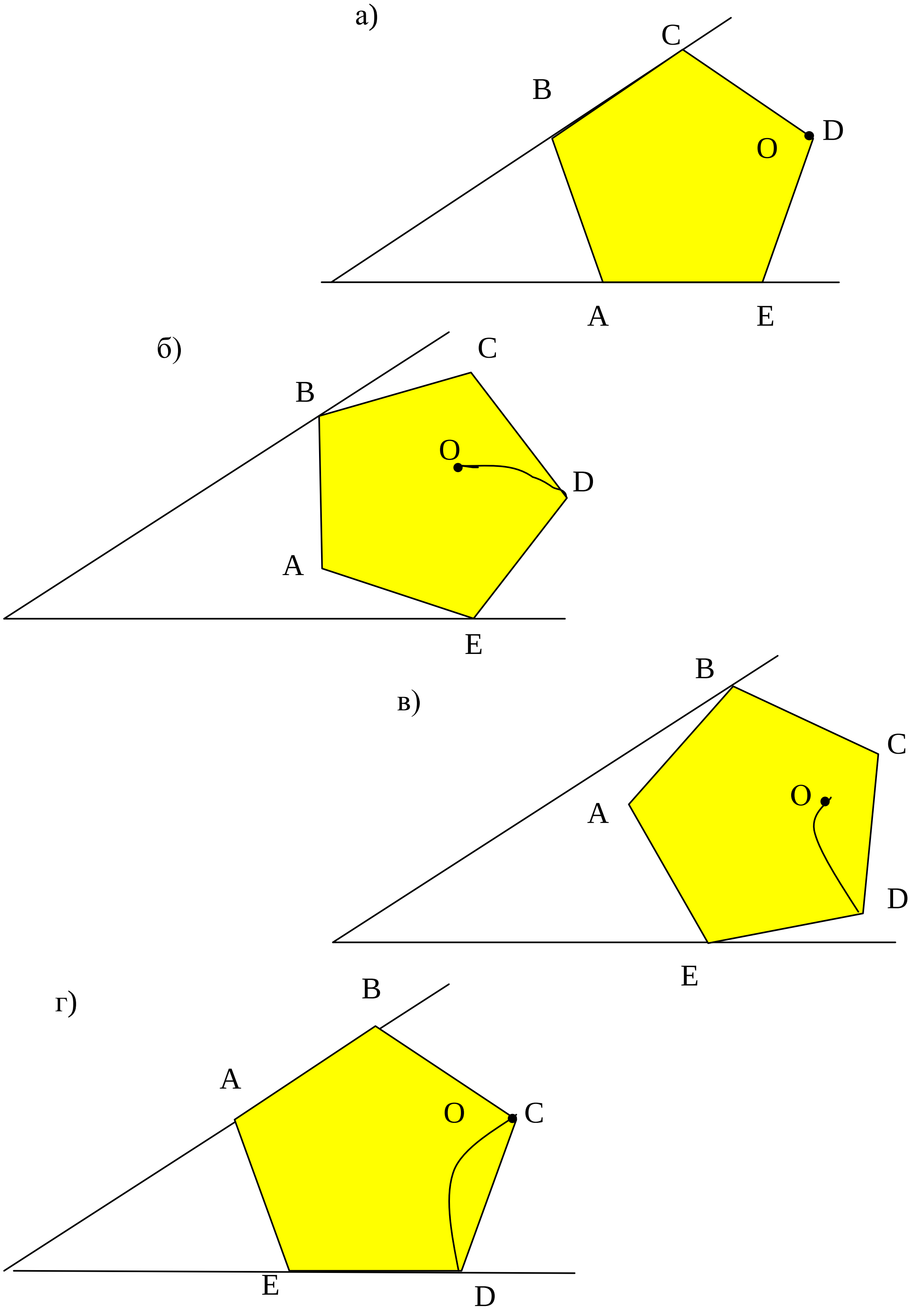
8.Об одной задаче Колмогорова

Какого будет перемещении точки O(по какой кривой) ,при повороте на одну вершину за раз, если точка расположена при вершине D, правильного пятиугольника ABCD

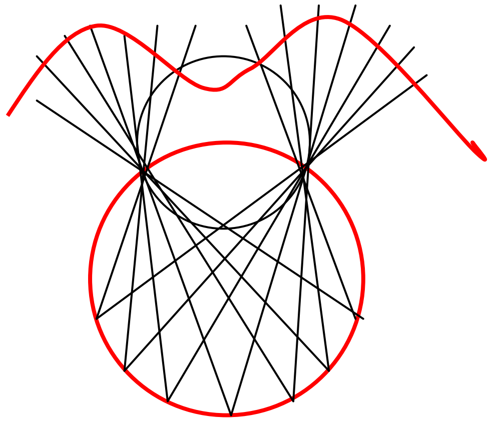
Решение

Поставим остриё карандаша к точке O.Полный поворот(на угол от 0 до 2π)пятиугольника естественно разбивается на пять этапов : поворот на угол от 0 до 2π/5, от 2π/5 до 4π/5 и т.д. После первого этапа на исходной стороне угла оказывается соседняя со стороной BC сторона AB пятиугольника, после второго –соседняя с ней сторона AE и т. д.В каждый из этих этапов наш угол опирается на какую-нибудь одну диагональ пятиугольника: в первый- на диагональ BE,затем – на AD, потом на EC, на DBи , наконец , на CA.

При повороте фигуры из начального положения(а) в положение (г) получим некоторую кривую.

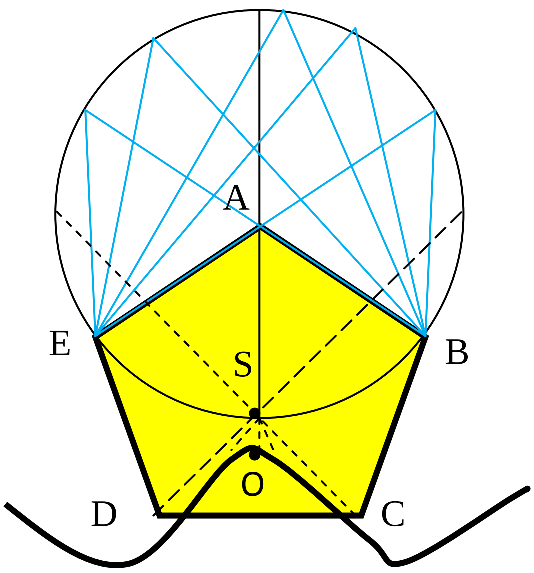


При дальнейшем повороте фигуры получится « звёздачка».



Что же за кривые образуют границу звезды?

Мы уже отмечали, что при повороте на величину от 0 до 2π /5 наш угол будет опираться на диагональ BE; следовательно, его вершина будет скользить по дуге окружности .Точка O находится на биссектрисе угла и



удалена от его вершины на заданное расстояние. Биссектриса угла при движении вершины угла по большей из дуг BE рассматриваемой окружности будет проходить через середину S меньшей дуги BE этой окружности. Таким образом, метод построения искомой кривой ясен: нужно через каждую точку большей дуги BE нашей окружности и середину S меньшей дуги провести прямую и от точки большей дуги отложить отрезок, равный расстоянию от точки O до вершины угла(EDC);тогда концы этих отрезков будут описывать искомую кривую.Тоже самое проделываем с диагоналями AD,EC,DB,CA, поворачивая наш угол соответственно на величины от2π/5 до 4π/5, от 4π/5 до 6π/5 и от 6π/5 до 8π/5 и от 8π/5 до 2π.Получившаяся кривая давно известна – Улитка Паскаля

Заключение

В моей работе я рассмотрела, возможно, все типы пятиугольников и их применение, но вы могли заметить, что особое внимание я уделила пятиугольнику Рейнхардта, ну и конечно замощению плоскости пятиугольниками. На мой взгляд это весьма интересная и загадочная тема. Я думаю, что после прочтения работы вы тоже так подумаете,она заинтересует олимпиадников и людей увлечённых математикой. Я раскрыла интереснейшие факты о пятиугольниках и их применении.

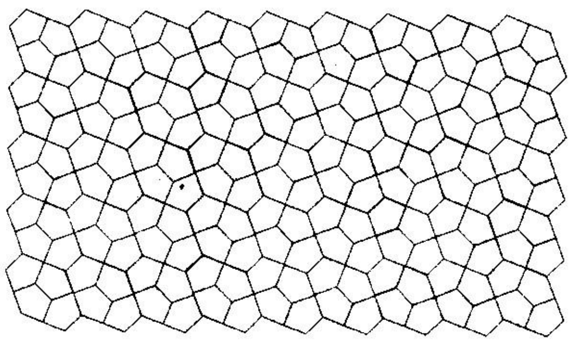
Литература

1. Журнал «Квант»№5 - «Наука» 1981г.
2. Журнал «Квант»№11- «Наука» 1973г.
3. Мерлин А. В., Мерлина Н. И. Нестандартные задачи по математике в школьном курсе.- Чебоксары, 1998.
4. Сивашинский И. Х. Задачи по математике для внеклассных занятий.- М.: Просвещение, 1968.

Приложение

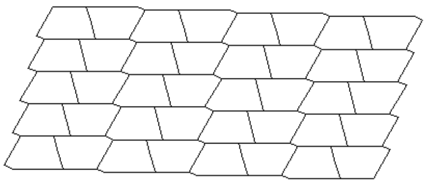
Характерное свойство для пятиугольника Рейнхардта

Геометрического паркета, составленного из таких многоугольников: четверки соседних пятиугольников можно двумя способами сгруппировать в вытянутые шестиугольники. Семейства таких шестиугольников заполняют всю плоскость во взаимно ортогональных направлениях.

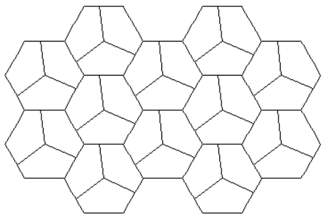


Существует четырнадцать видов пятиугольников , которыми можно замостить плоскость

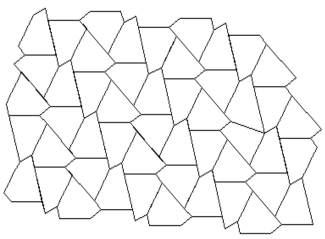
Тип 1 : D + E = 180;



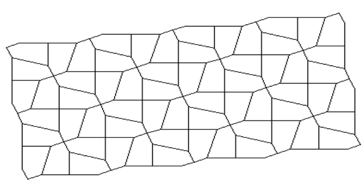
Тип 3 : A = C = D = 120, a = b, d = c + e



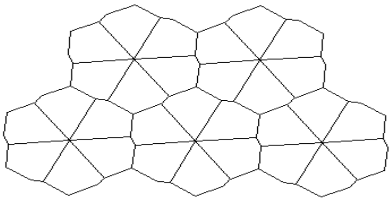
Тип 2:C + E = 180, a = d



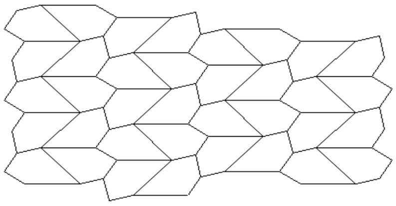
Тип 4 : A = C = 90, a = b, c = d



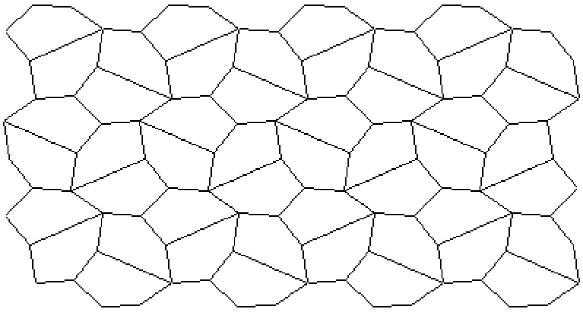
Тип5: C = 2A = 120, a = b, c = d



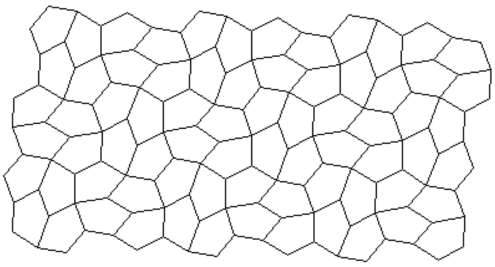
Тип 6 : C + E = 180, A = 2C, a = b = e, c = d



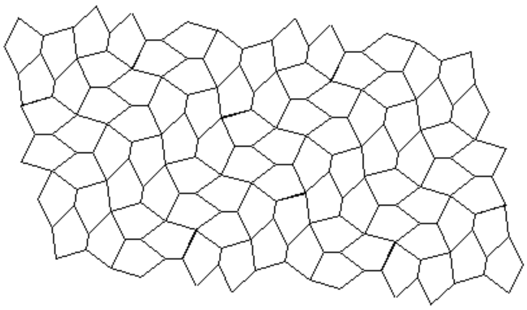
Тип 7:2B + C = 360, 2D + A = 360, a = b = c = d



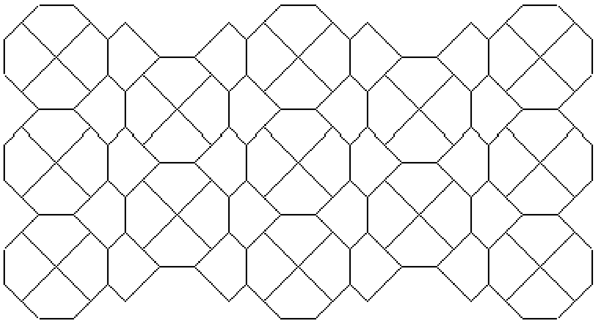
Тип8:2D + C = 360, a = b = c = d



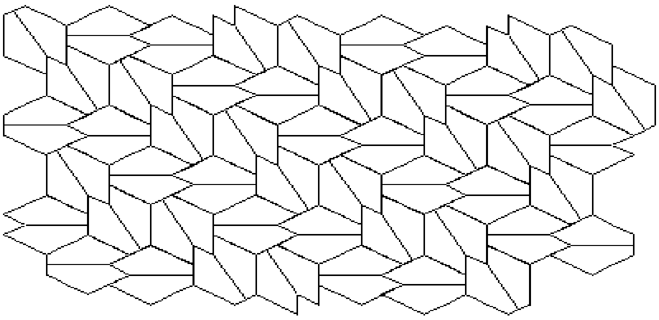
Тип 9: 2E + B = 360, 2D + C = 360, a = b = c = d



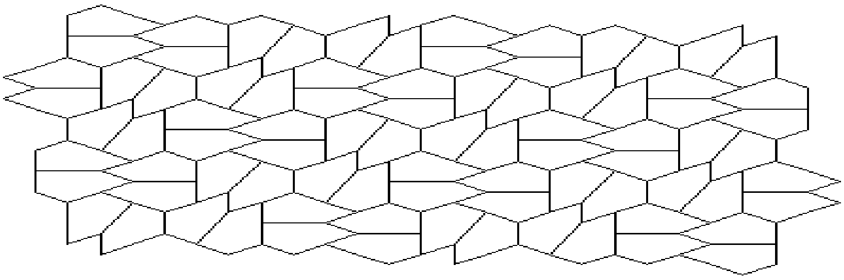
Тип 10:E = 90, A + D = 180, 2B - D = 180, 2C + D = 360, a = e = b + d



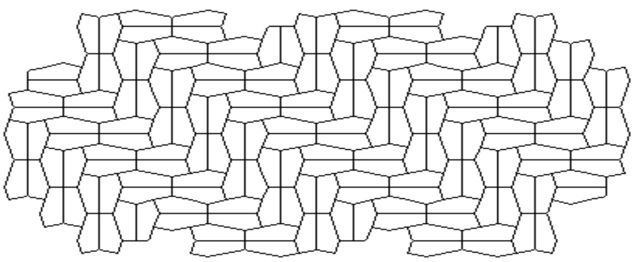
Тип 11: A = 90, C + E = 180, 2B + C = 360, d = e = 2a + c



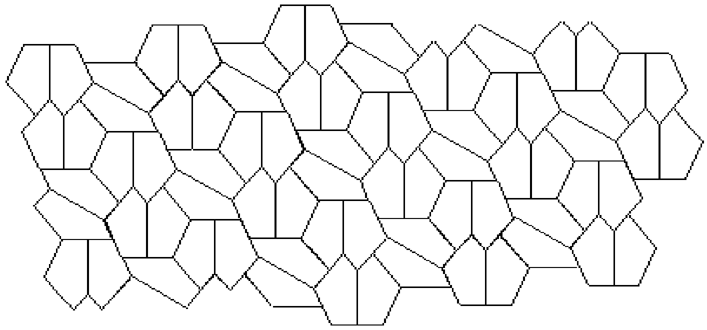
Тип 12:A = 90, C + E = 180, 2B + C = 360, 2a = c + e = d



Тип 13:A = C = 90, 2B = 2E = 360 - D, c = d, 2c = e



Тип 14: $D = 90$, $2E + A = 360$, $C + A = 180$, $B + D + E = 360$, $2e = 2c = a$



Типы 1-5 были найдены К. Рейнхардтом в 1918.

Типы 6-8 были найдены В. Кэшнером в 1968.

Тип 10 был найден Р. Джеймсом в 1975.

Типы 9, 11-13 были найдены М. Рисом в 1976-1977.

Тип 14 был найден Р. Стейном в 1985.

Игра Пекс

Пекс - это абстрактная настольная игра для двух игроков, которая играется на доске, разбитой на пятиугольные клетки. Эта игра была "придумана" Дэвидом Бушем (David Bush).

Пекс относится к семейству игр, включающему такие игры, как Гекс, Y, Атолл и Перекрестный Путь.

Разбиение на пятиугольные клетки было взято из списка 14 известных мозаичных разбиений плоскости на пятиугольники.

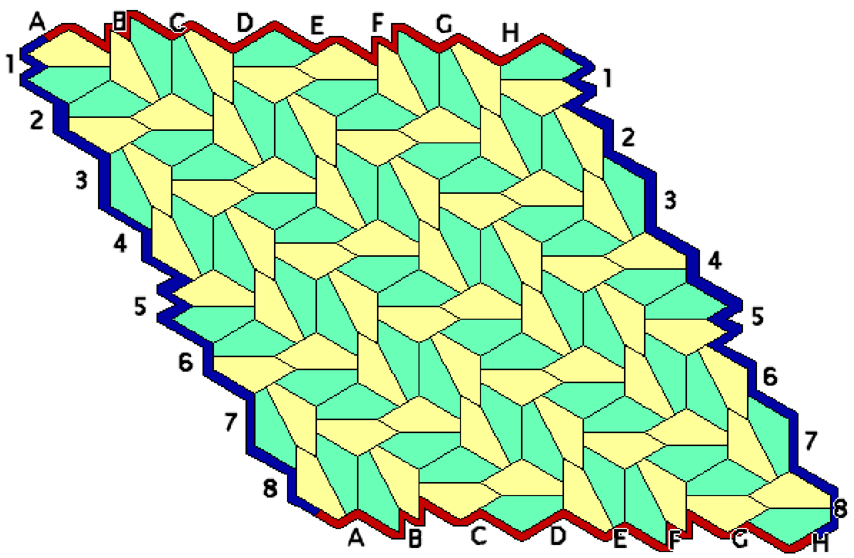
Выбранное разбиение было открыто Маржори Райс (Marjorie Rice), которой по праву принадлежит звание соавтора Пекса.

Целью игры

Пекс является построение неразрывной цепочки из камней своего цвета, соединяющей противоположные стороны доски, окрашенных в соответствующие цвета. В игре Пекс используется специальная доска, разбитая на пятиугольные клетки. Пары противоположных сторон доски окрашены двумя цветами, обычно красным и синим.

Процесс игры

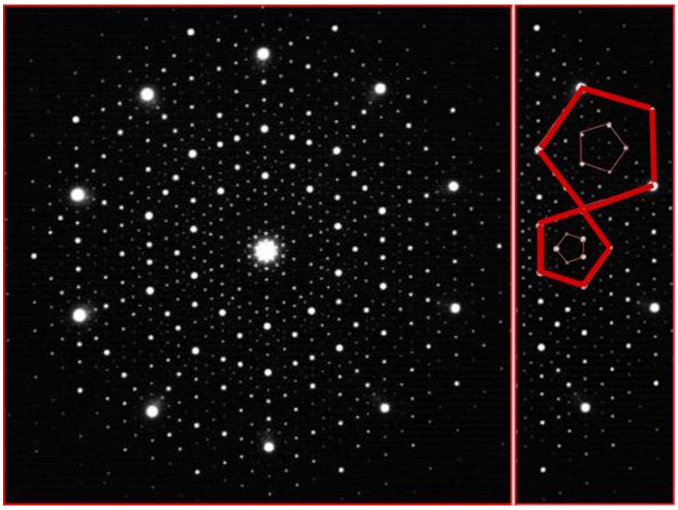
Игра начинается с пустой доски. Один из игроков играет красными камнями, другой - синими. Игроки поочерёдно выставляют фишки своего цвета в любую свободную клетку доски. В виду того, что первый игрок имеет очевидное преимущество, для уравнивания шансов используется "Правило пирога". Это правило позволяет второму игроку сменить цвет сразу после того, как первый игрок делает свой первый ход.



Конец игры

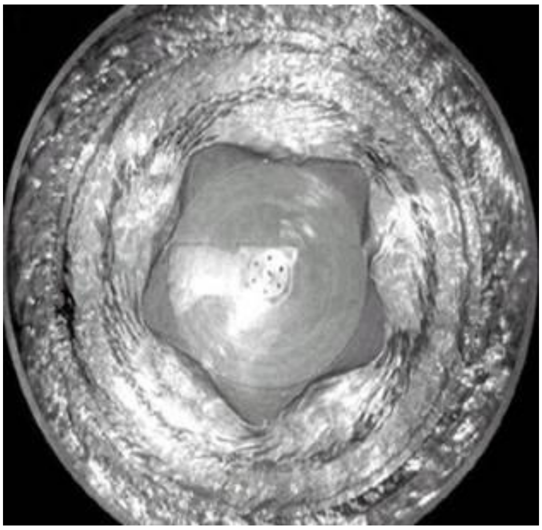
Игра завершается, когда один из игроков выстраивает непрерывную цепочку из камней своего цвета, соединяющую две противоположные стороны доски, окрашенные в тот же цвет. В Пексе не бывает ничейных ситуаций.

Пятиугольники в квазикристаллах



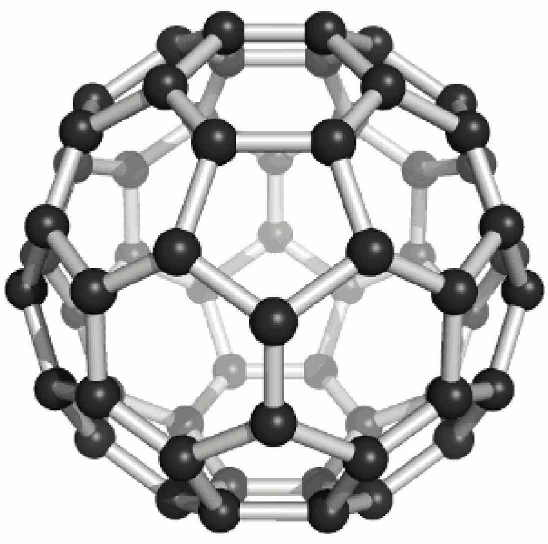
Дифракционная картина, которую даёт квазикристалл. Соотношение размеров двух наиболее крупных пятиугольников, отмеченных справа, равно τ, а соотношение между крупным пятиугольником и вписанным в него пентагоном — τ2. (ИллюстрацияThe Royal Swedish Academy of Sciences.)

Пятиугольник в «Ведерке Ньютона»



В Интернете можно найти упоминания о проводившихся в Дании опытах с так называемым «Ведерком Ньютона». Это обычный цилиндрический сосуд с водой, у которого электромотор вращает лежащий на дне круглый плексигласовый диск. При разных скоростях вращения на поверхности воды появляются геометрические фигуры – треугольник, квадрат, пятиугольник, шестиугольник. Но именно пятиугольник оказывается наиболее устойчивой фигурой.

Фуллерены (футболены) были открыты в 1985 г.



Это аллотропные формы углерода, которые содержат чётное (более 20) количество атомов углерода, образующих три связи друг с другом. Атомы в молекулах фуллеренов расположены на поверхности сферы или сфероида в вершинах гексагонов и пентагонов (см рис.). Фуллерены с количеством атомов более 70 называются высшими фуллеренами. Научный интерес к изучению фуллеренов проявился после изобретения в 1990 г. способа их производства в больших количествах и, особенно, после присуждения в 1996 г. Нобелевской премии по химии за открытие фуллеренов. Интерес к исследованиям фуллеренов обусловлен разнообразием новых физико-химических явлений, происходящих при участии фуллеренов, и перспективами применения нового класса материалов, создаваемых на их основе.

Пятиугольный дом в Японии

Пентагон славен тем, что является крупнейшим в мире офисным зданием.

Здание министерства обороны США

Наталья Дмитрашкина,
ученица 11"В" класса
Речицкого районного лицея

«Математическая мозаика»

1**. Условие игры**:

1) Состав команды (от каждого класса) шесть человек, а остальные болельщики.
2) Каждая команда готовит презентацию (четыре вопроса по математике).
3) При отсутствии презентации команда автоматически выбывает.
4) Команда оценивают ответы другой команды на свои вопросы (бланки).
5) Ведущие ведут на доске учет по каждому конкурсу.
6) В финал выходят две команды.

2. Ход игры:

1)Приветственное слово ведущих.
2) Математическое соревнование двух команд.
3) Первая команда задаёт математические вопросы второй команде (в виде презентации состоящей из четырех вопросов).
4) После ответов команды меняются местами.
5) Во время игры болельщикам предоставляется кроссворд "Математика".

Болельщики каждой команды решают задания, которые могут принести дополнительные баллы их команде.

6) Игра “Математическо- физический Крокодил” между командами (на пока з одного понятия отводится 1 минута).
7) Командам читались Интересные факты про математику
8) Подведение итогов

3. Финал:

1) Каждой команде задаются вопросы "Гонка за лидером" (32 вопроса каждой команде на каждый из которых отводится 1 минута).
2) Игра финал “Математическо- физический Крокодил” (на показ одного понятия отводится 1 минута).
3) Болельщикам предоставлялась возможность решать кроссворд «Математика и красота», которые могут принести дополнительные баллы их команде ..
4) Командам читались Интересные факты про математику.
5) Первая команда задаёт математические вопросы второй команде (в виде презентации состоящей из четырех вопросов).

6) После ответов команды меняются местами.

4. Выставления оценок:

1) Каждый правильный ответ на вопрос в презентации составляет 5 баллов;
2) Болельщики решая кроссворд могут принести своей команде столько баллов сколько правильных ответов в кроссворде.
3) В игре крокодил за каждое угаданное математическое и физическое определение дается 5баллов.
4) В вопросах "Гонка за лидером" каждый правильный ответ на один вопрос составляет 1 балл.
5) Каждой команде предоставлялась таблица №1.

Таблица №1. Таблица которую заполняют ведущие на доске.

Команды	Презентация	Кроссворд для болельщиков	Крокодил по математике и физике	Гонка за лидером	Сумма баллов

Презентации команд(математические вопросы):

<u>**Команда 10 «В».**</u>

1) Какая объемная геометрическая фигура очень больно кусается, иногда со смертельным исходом?

<u>Подсказка.</u> Тело, полученное объединением всех лучей, исходящих из одной точки и проходящих через плоскую поверхность

Ответ. Конус – хищный морской моллюск с конической яркой раковиной, имеющий ядовитую железу.

2) Составление карты какой страны получило название «Великое тригонометрическое исследование»?

<u>Подсказка.</u> Пейзаж Индии со слонами

Ответ. Индия, она на карте имеет форму треугольника.

3) Какой математический закон, известный всем с младших классов, стал популярной пословицей?

Подсказка.

1 + 1 = 2

Ответ. От перемены мест слагаемых сумма не изменяется.

4) В каком городе стоит памятник числу π?

<u>Подсказка.</u> Крупнейший город на северо-западе США и в штате Вашингтон в частности, крупный морской порт.

Ответ. В Сиэтле.

<u>***Команда 10 «Б».***</u>

1) Дайте определение функции?

Ответ. Функцией , заданной на множестве D, называется закон, по которому каждому значению *x* из множества D ставится в соответствие одно определённое значение *y*

2) В нашем классе 30 учащихся. На экскурсию в музей ходили 23 человека, в кино и в музей - 6 человек, а 2 человека не ходили ни в кино, ни в музей. Сколько человек нашего класса ходили в кино?

Ответ. Найдем, сколько человек НЕ ходило в кино. Это количество складывается из тех, кто ходил только в музей, и кто не ходил никуда. Только в музей ходило 23-6 = 17 человек. Никуда не ходили 2 человека. Т.е. 17+2 = 19 человек не ходили в кино. Соответственно, 30-19 = 11 человек ходили в кино.

3) Французский философ, математик и физик. Создал ряд важных теорем в различных областях математики. С появлением его произведения «Геометрия» началась новая эра в развитии математики с применением координатной системы и введением взаимозависящих переменных величин.

Ответ. Рене Декарт (1596 – 1650)

4)Борода у человека растет, удлиняясь в неделю на 1/5 дюйма (1 дюйм равен приблизительно борода растет с постоянной скоростью на протяжении всей жизни человека. Какой длины достигла бы борода у мужчины, который не брился в течение 30 лет?

Ответ. Приблизительно 7,3 метра или 3 сажени и 5 футов

<u>Команда 10 «Г».</u>

1)Для того, чтобы пронумеровать страницы в книге, понадобилось 492 цифр. На скольких страницах напечатана книга?

Подсказка. Для первых 9 страниц – 9 цифр. Для следующих 90 страниц 90 х 2 = 180 цифр. На трехзначные номера страниц приходиться 492 -180 - 9 = 303 цифры.

Ответ. Для первых 9 страниц – 9 цифр. Для следующих 90 страниц 90 х 2 = 180 цифр. На трехзначные номера страниц приходиться 492 -180 - 9 = 303 цифры. 303 : 3 = 101 страница, 9 + 90 + 101 = 200. Всего в книге 200 страниц.

2)Аристотель решил у себя в саду посадить 10 деревьев. Как ему разместить деревья в саду так, чтобы получилось 5 рядов и в каждом ряду по 4 дерева.

<u>Подсказка.</u> В форме геометрической фигуры .

Ответ. В форме звезды

3)Часы показывают 16 часов 30 минут. Сколько градусов имеет угол, образованный стрелками.

<u>Подсказка.</u> Один оборот стрелки часов, т.е. час равен 360 градусов.
Один час равен 12 пятиминуток. Одна пятиминутка равна 30 градусов .

Ответ. Между большой и маленькой стрелками полторы пятиминутки. Угол между стрелками 45 градусов.

4) Кому как-то раз ему вздумалось совершить полет на воздушном шаре, да еще во время солнечного затмения?

<u>Подсказка.</u> В небольшом живописном имении Боблово готовились в "домашних" условиях наблюдать затмение солнца. И вдруг, когда до затмения оставалось немногим более недели, из Петербурга в Боблово пришла

телеграмма. В ней Русское техническое общество извещало, что в Твери снаряжается воздушный шар для наблюдения затмения и что совет считает долгом заявить об этом, чтобы этот учёный в случае желания "лично мог воспользоваться поднятием шара для научных наблюдений".
Ответ. Д.И.Менделеев.

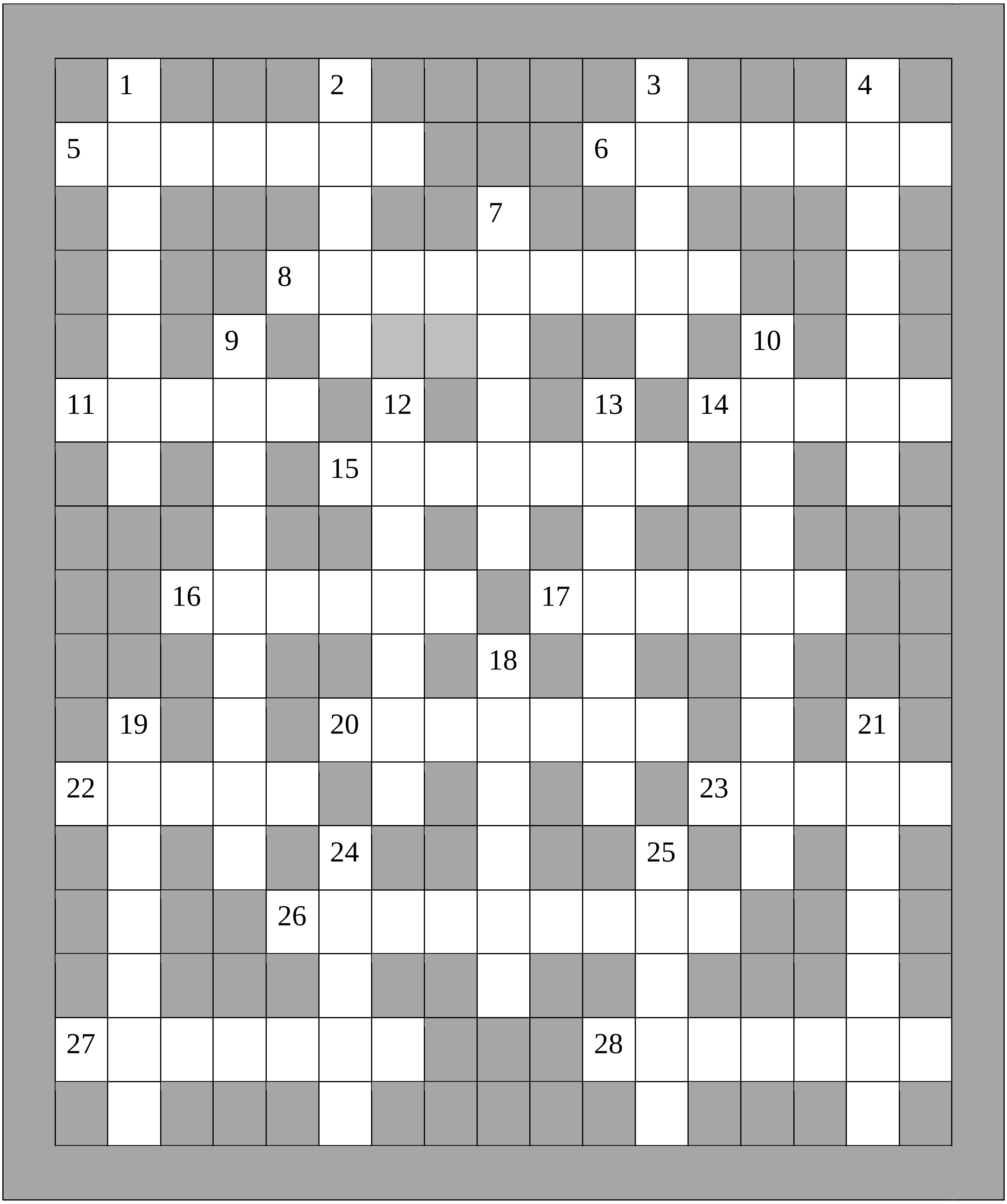
Команда 10 «А».

1) Кого из великих математиков заставляли заниматься математикой?
Подсказка. Это женщина.
Ответ. Софья Ковалевская
2) Кто первый предположил что при землетрясении поверхность земли искажается в виде волн?
Подсказка. Известный русский учёный.
Ответ. Михаил Васильевич Ломоносов.
3) Дополните список предметов которые изучали древние люди:

- *География*
- *Природоведенье*
- *Астрономия*
- *Риторика*
- *История*

и какой ещё?
Подсказка. С ним вы сталкиваетесь в школе.
Ответ. Геометрия.
4) Казнена за любовь к математике, перевернула представления древних ученых, опровергла систему движения планет по системе Птолемея. Кто это?
Подсказка. Об этом человеке снят фильм.
Ответ. Гипатия.

Кроссворд "Математика"



По горизонтали.

5. Вид перемещения плоскости. (Перенос).

6. Инструмент для построения окружностей. (Циркуль).
8. Одна из характерных точек графика функции. (Экстремум).
11. Простейшая геометрическая фигура. (Линия).
14. Отрезок прямой, соединяющий две точки окружности. (Хорда).
15. Специально оборудованный класс для занятия математикой. (Кабинет).
16. Единица измерения углов. (Минута).
17. Буква греческого алфавита, используемая для обозначения приращения. (Дельта).
20. Сходство одинаковых по форме фигур, отличающихся размерами. (Подобие).
22. Одно из основных понятий в математике. (Число).
23. Двучлен. (Бином).
26. Выражение, содержащее неизвестную величину. (Уравнение).
27. Выражение с показателем. (Степень).
28. Зависимая переменная. (Функция).

По вертикали.

1. Арифметическое действие. (Деление).
2. Геометрическое понятие. (Точка).
3. Математический знак. (Минус).
4. Величина, показывающая, какую часть плоскости занимает данная фигура. (Площадь).
7. Наглядное изображение функциональной зависимости. (График).
9. Часть дроби. (Числитель).
10. Вид отображения плоскости на себя. (Гомотетия).
12. Результат одного из арифметических действий. (Частное).
13. Фигура, образующаяся при разрезании геометрического тела плоскостью. (Сечение).
18. Радикал. (Корень).
19. Самая большая хорда. (Диаметр).
21. Объект изучения, представление о котором можно дать с помощью определения. (Понятие).
24. Часть геометрического тела. (Грань).
25. Тригонометрическая функция. (Синус).

Игра “Математическо-физический Крокодил”

(На показ одного понятия отводится 1 минута):

1. Скрещивающиеся прямые.
2. Отрезки параллельных прямых, расположенных между параллельными плоскостями равны.
3. Сила притяжения.
4. Перемещение.
5. Вакуум.
6. Невесомость.
7. Угол между прямыми.
8. Параллельные плоскости.
9. Ускорение.
10. Пересечение прямой и плоскости.
11. Электрическое поле.
12. Сила тяжести.

Финал. Вопросы "Гонка за лидером"

(на каждый из предложенных математических вопросов отводится 30 секунд):

Вопросы первой команде:

1. В каком треугольнике все высоты пересекаются в вершине? (В прямоугольном.)
2. Число десятков в тысяче. (10)
3. Математическое предложение, не требующее доказательств. (Аксиома.)
4. Сумма длин многоугольника. (Периметр.)
5. В каком числе столько же цифр, сколько букв в его названии? (Сто.)
6. Дробь, меньшая единицы. (Правильная.)
7. Наибольший общий делитель взаимно простых чисел. (Один.)
8. Сумма противоположных чисел. (Нуль.)
9. Какой угол опишет минутная стрелка за 5 минут. (30 градусов)
10. Как называется равенство, верное при определенных значения неизвестных. (Уравнение.)
11. Кто первый систематизировал геометрические сведения? (Евклид.)
12. Какой русский математик нашел математический способ, как лучше всего кроить одежду? (Чебышев.)
13. Модуль нуля. (0)
14. Сколько останется у ромба углов, если один из них отрезать? (5.)
15. Какую часть числа составляют 25 %? (Четвертую.)
16. Число, которое делится на все числа без остатка. (Нуль.)
17. Половина-треть числа. Какое это число? (1,5.)
18. Цифры третьего разряда. (Сотни.)

19. Кто первый предложил использовать запятую как математический знак? (Непер, шотландский математик.)
20. Луч, делящий угол пополам. (Биссектриса.)
21. Русский математик, кораблестроитель. (Крылов.)
22. Сколько граней у шестигранного карандаша. (Восемь.)
23. Непересекающиеся прямые на плоскости. (Параллельные.)
24. Счетный прибор, которым пользовались греки. (Абак.)
25. Наименьшее семизначное число. (Миллион.)
26. Автор школьных математических таблиц. (Брадис.)
27. Сколько вершин у куба? (8.)
28. Бревно распилили на 8 частей. Сколько сделали распилов?(7.)
29. Сколько различных биссектрис можно провести в треугольнике? (Три.)
30. Число, из которого вычитают. (Уменьшаемое.)
31. Цифра, которая никогда не может быть в первой записи натурального числа. (Нуль.)
32. Прибор для измерения углов на местности. (Астролябия.)

Вопросы второй команде:

1. Прямая, пересекающаяся другую прямую или плоскость под острым углом. (Наклонная.)
2. Сколько килограммов в половине тонны. (500кг.)
3. Кратчайшее расстояние от точки до прямой. (Перпендикуляр.)
4. Отрезок, соединяющий две точки окружности и проходящей через центр. (Диаметр.)
5. Количество делителей простого числа. (Два.)
6. Значение переменной при решении уравнения. (Корень.)
7. Деление числителя и знаменателя на одно и тоже число. (Сокращение.)
8. Два числа, произведение которых равно 1. (Взаимно обратные.)
9. Самое маленькое простое число. (2.)
10. Географическая координата на земной поверхности. (Долгота.)
11. Автор учебника “Алгебра и начала анализа”, по которому вы занимаетесь. (Колмогоров.)
12. Петербургский знаменитый математик, академик, выходец из Швейцарии. (Эйлер.)
13. Треугольник с прямым углом. (Прямоугольный.)
14. Число, на которое делят. (Делитель.)
15. Результат сложения чисел или величин. (Сумма.)
16. В обыкновенной дроби число, записанное над чертой. (Числитель.)
17. Сколько двузначных чисел, у которых первая цифра 1? (10.)
18. Трое играли в шахматы. Всего было сыграно три партии. Сколько партий сыграл каждый? (По 2 партии.)
19. Латинское слово, означающее «исполнение», «осуществление»,

которое употребил в XVII в. Г. В. Лейбниц для обозначения зависимости между величинами. (Функция.)

20. Угол в 1^0 рассматривают в лупу, дающую трехкратное увеличение. Какой величины окажется угол? (1^0.)

21. Тысячная часть числа. (Промилле.)

22. Часть прямой. (Отрезок.)

23. Результат деления одного числа на другое. (Частное.)

24. Модуль числа -5. (5.)

25. Кто ввел в употребление десятичные дроби? (Самаркандский математик Каши).

26. Какая цифра в переводе с латинского языка обозначает «никакая»? (Нуль.)

27. Инструмент для измерения углов на плоскости. (Транспортир.)

28. Произведение трех измерений прямоугольного параллелепипеда. (Объем.)

29. Два числа, отличающиеся друг от друга только знаком. (Противоположные.)

30. Кто предложил обозначать отношение длины окружности C к ее диаметру D буквой π? (Лейбниц, немецкий математик.)

31. Геометрическая фигура, состоящая из двух лучей, имеющих общее начало. (Угол.)

32. Сколько градусов содержит угол, если он составляет половину развернутого угла? (90^0.)

Игра “Математическо-физический Крокодил”

(На показ одного понятия отводится 1 минута):

1. Возрастание функции.
2. Убывание функции.
3. Сжатие.
4. Сложение.
5. Работа.
6. Температура.
7. Время.
8. Плечо силы.

Интересные факты про математику

1) **Кто решил сложную математическую проблему, приняв её за домашнее задание?**

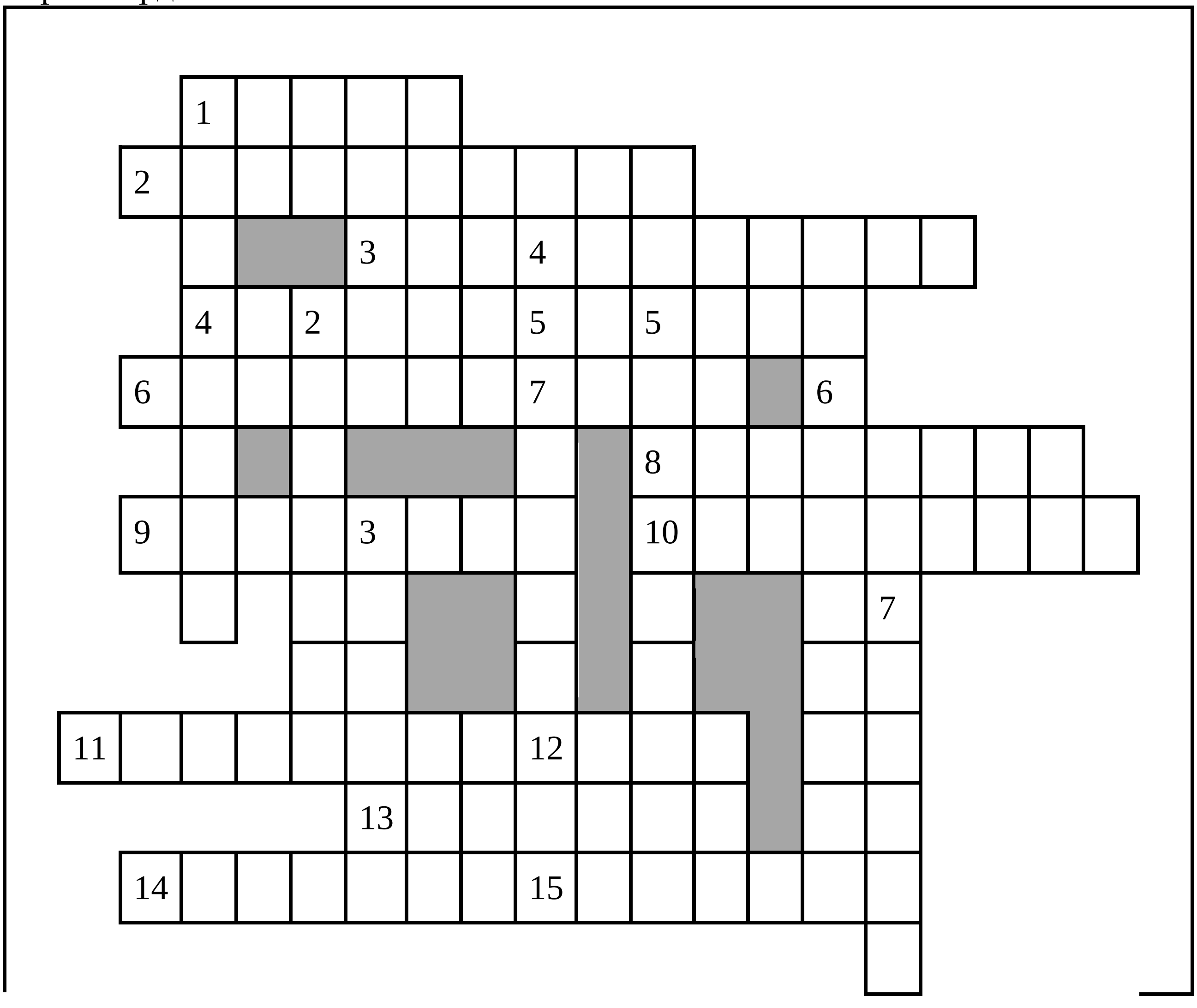
Американский математик Джордж Данциг, будучи аспирантом университета, однажды опоздал на урок и принял написанные на доске уравнения за домашнее задание. Оно показалось ему сложнее обычного, но через несколько дней он смог его выполнить. Оказалось, что он решил две «нерешаемые» проблемы в статистике, над которыми бились многие учёные.

2) **Какая игра связана с числом дьявола?**

Сумма всех чисел на рулетке в казино равняется числу дьявола — 666.

3) Английский математик Абрахам де Муавр в престарелом возрасте однажды обнаружил, что продолжительность его сна растёт на 15 минут в день. Составив арифметическую прогрессию, он определил дату, когда она достигла бы 24 часов — 27 ноября 1754 года. В этот день он и умер.

Кроссворд 1



Вопросы к кроссворду 1.

По горизонтали. 1. "Высшая степень творческой одарённости, употребляемой на благо человечества". 2. Царица всех наук. 3. Геометрия живописи. 4. Искусство отражать действительность в звуковых художественных образах. 5. Великий учёный, первым открывший правильные звёздчатые многогранники. 6. Одно из преобразований на плоскости и в пространстве. 7. Часть пространства внутри пики звёздчатого многогранника. 8. Наука о прекрасном (изучающая сферу чувств и художественной деятельности людей). 9. Искусство изображения с помощью красок, наносимых на поверхность. 10. Искусство строить здания и другие сооружения. 11. Храм богини Афины в Греции. 12. "Рисунок, представляющий собой определённое сочетание, переплетение линий, красок, фигур, теней". 13. Кривая линия с изменяющимся радиусом кривизны. 14. То, чему невольно радуется человек. 15. Великий учёный-математик, написавший трактат "О спиралях".

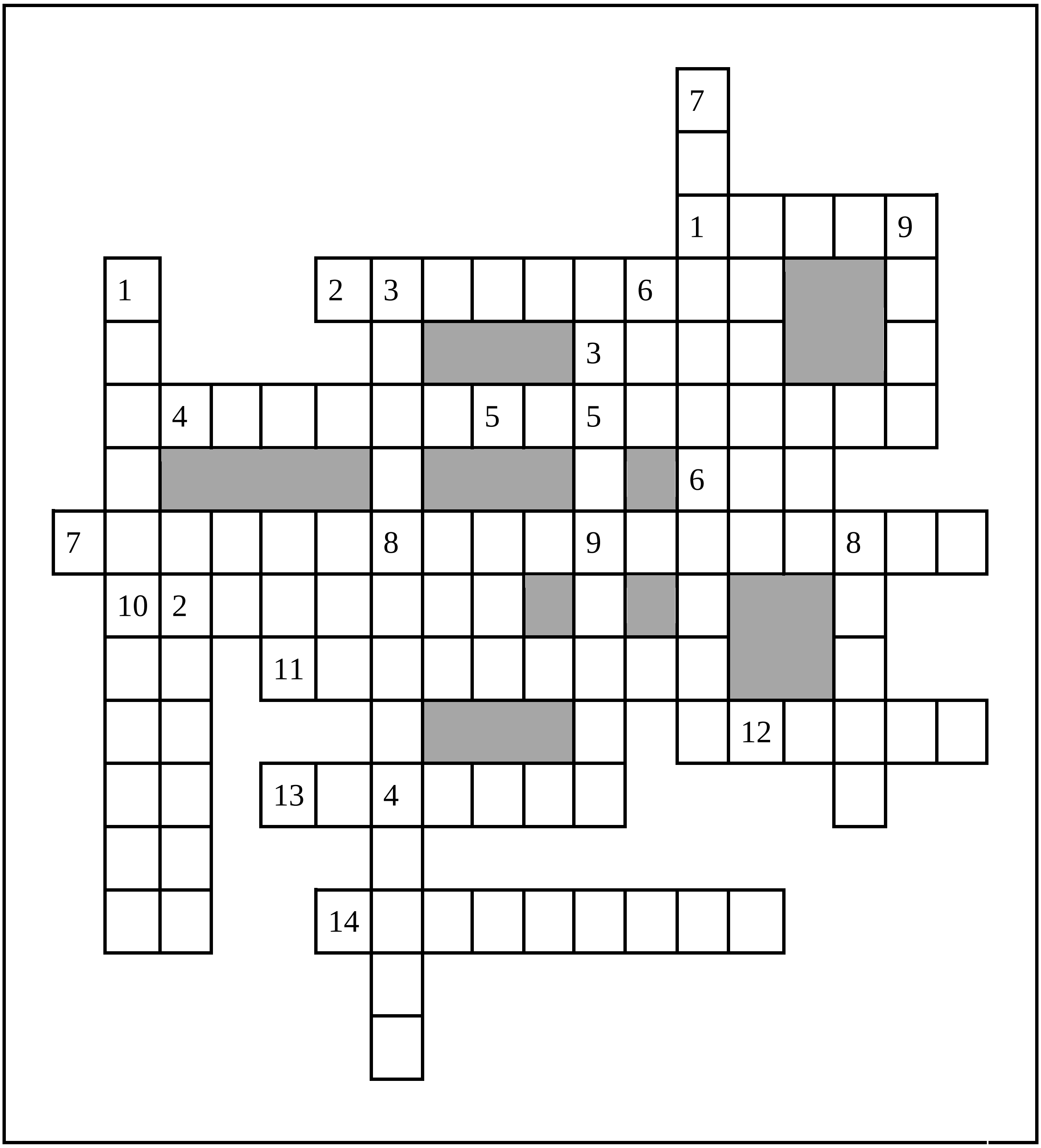
По вертикали. 1. Согласованность частей одного целого. 2. Сечения - "Божественная" пропорция. 3. Имя учёного, продолжившего открытие правильных звёздчатых многогранников. 4. Искусство, изображения которого имеют объёмную форму; ваяние, высекание. 5. Искусство стихосложения и стихотворные произведения. 6. Пропорция - основной закон гармонии, красоты. 7. Опознавательный знак в школе Пифагора.

Ответы к кроссворду 1.

По горизонтали. 1. гений. 2. математика. 3. перспектива. 4. музыка. 5. Кеплер. 6. поворот. 7. угол. 8. эстетика. 9. живопись. 10. зодчество. 11. Парфенон. 12. узор. 13. спираль. 14. красота. 15. Архимед.

По вертикали. 1. гармония. 2. золотое. 3. Пуансо.4.скульптура. 5. поэзия. 6. сечение. 7. звезда.

Кроссворд 2



Вопросы к кроссворду 2.

По горизонтали. 1. Имя учёного математика, сравнившего узоры художника и поэта с узорами математика. 2. Один из основных законов красоты. 3. "Равномерно повторяющееся чередование каких-либо сменяющих друг друга элементов". 4. Великий учёный древности, по имени которого называли правильные многогранники. 5. Раздел математики, изучающий форму, размеры, и свойства различных фигур на плоскости и в пространстве. 6. Правильный гексаэдр. 7. Известный учёный эпохи Возрождения, автор трактата "О божественной пропорции". 8. Щипковый музыкальный инструмент. 9. Правильный четырёхгранник. 10. Правильный шестигранник. 11. Правильный двенадцатигранник. 12. "Мыслимый, воображаемый образец совершенства". 13. Величайший учёный Древней Греции, прославивший пентаграмму. 14. Основной закон гармонии.

По вертикали. 1. Математическое название пятиконечной звезды. 2. Великий математик, написавший "Начала". 3. Правильный двадцатигранник. 4. "Внешние (видимые, осязаемые) очертания предмета", фигура. 5. Правильный восьмигранник. 6. Столица древней империи. 7. Искусство строить здания и другие сооружения. 8. Величайший учёный математик, создавший наибольшее количество научных трудов. 9. "Мысленный образ чего-нибудь", "намерение, замысел, план", убеждение.

<u>Ответы к кроссворду 2.</u>
По горизонтали. 1. Харди. 2. симметрия. 3. ритм. 4. Платон. 5. геометрия. 6. куб. 7. Пачоли. 8. арфа. 9. тетра. 10. гексаэдр. 11. додекаэдр. 12. идеал. 13. Пифагор. 14. пропорция.

По вертикали. 1. пентаграмма. 2. Евклид. 3. икосаэдр.4.форма. 5. октаэдр. 6. Рим. 7. архитектура. 8. Эйлер. 9. Идея.