Геометрический смысл производной.

Касательная к графику функции

Урок геометрии в 10 классе

Ю. В. Шумакова,

учитель математики высшей категории

СШ № 20 г. Бреста

Задачи урока:

- обобщить знания по теме «Геометрический смысл производной. Касательная к графику функции»;
- систематизировать различные виды задач;
- научиться квалифицировать их по типам;
- вспомнить общие подходы и выработать алгоритм их решения;
- сформировать системы 3-х приёмов анализа и синтеза;
- развивать речь, обогащать её математическими терминами (предполагается, что учащиеся смогут выполнять анализ при выработке алгоритмов решения различных типов задач и грамотно расчленять сложную задачу на мелкие шаги);
- воспитывать самостоятельность, чёткость и последовательность в действиях при выполнении задач.

Оборудование: интерактивная доска, дифференцированная самостоятельная работа (Приложение 1), лист оценивания (Приложение 2).

Ход урока

I. Организационно-мотивационный этап (2 мин)

Цель – создание психологической готовности класса к уроку, введение учащихся в атмосферу познавательной деятельности.

II. Операционно-деятельностный этап (5 мин)

Цель: подготовить учащихся к включению и сведению полученных знаний в систему.

Фронтальная работа

- В чем заключается геометрический смысл производной?
- При каком условии графики линейных функций будут параллельны? Перпендикулярны?
- Запишите уравнение касательной к графику функции в точке X.
- Решение устных задач (на доске готовое условие)

1. Найдите k угловой коэффициент касательной, проведенной к параболе:

   a) $y = 2x^2$ в $x_0 = 1$;

   b) $y = -x^2 + x$ в $x_0 = -2$;

2. Найдите координаты точки, в которой касательная к параболе $y = x^2 + 3x - 10$ образует угол 135^0.

- А) У1: О каких элементах идёт речь в задаче?

О1: о параболе и касательной

У2: что необходимо найти в задаче?

О2: угловой коэффициент касательной, проведённой к параболе

У3: чем будем пользоваться при решении?

О3: понятием геометрического смысла производной

У4: сформулируйте алгоритм решения

- Б) У1: О каких элементах идёт речь в задаче?

О1: О параболе и касательной, проведённой к ней, а также известен угол наклона касательной с осью ОХ.

У2: что необходимо найти?

О2: координаты точки касания

У3: чем будем пользоваться при решении?

О3: $y'(x_0) = \tan\alpha$

У4: каков будет алгоритм решения?

О4: 1) находим $y'(x_0)$;

2) решаем соответствующее уравнение относительно x_0, находим абсциссу точки касания, потом ординату y_0.

У: Сейчас мы вместе квалифицируем задачи по типам и выработаем алгоритм их решения, причём к каждому типу задач приведем стандартный пример и творческий.

III. Этап обобщения и систематизации

Цель: квалифицировать задачи по типам и выработать алгоритм их решения.

<u>1-й тип задач:</u> «Проведение касательной» (на составление уравнения касательной, по известной точке касания).

Задача 1 (стандартная).

Написать уравнение касательной, проведенной к графику функции $y = (2x+1)^3$ в точке с абсциссой $x_0 = -1$.

Учащийся выполняет у доски, остальные самостоятельно.

Задача 2 (творческая).

Найти площадь треугольника, образованного касательной, проведенной к графику функции $y = 3\sqrt{1-4x}$ в точке с абсциссой $x_0 = -2$ и осями координат.

У1: О каких элементах идет речь в задаче?

О1: Задана функция, к её графику проведена касательная, дана точка касания.

У2: Что необходимо найти в задаче?

О2: Площадь треугольника, образованного касательной и осями координат.

У3: Составим алгоритм решения.

О3: 1) составить уравнение касательной $y = 5 - 2x$;

2) построить эту касательную;

3) увидеть, что образовался прямоугольный треугольник, и найти его площадь.

<u>2-й тип задач:</u> «Нахождение точки касания, зная угол, образующий касательной с осью $0x$».

Задача 1 (стандартная).

Касательная к параболе $y = -5x^2 - 9x + 3$ образует с положительным направлением оси абсцисс угол $\alpha = 45°$. Найти ординату точки касания.

Учащийся выполняет у доски, остальные самостоятельно.

Задача 1 (творческая).

Касательная, проведенная к параболе $y = x^2 - 5x + 10$, образует с осью абсцисс угол $\alpha = 135°$. Найти расстояние от точки касания до начала координат.

У1: О каких элементах идет речь в задаче?

О1: Задана функция, дан угол наклона касательной с осью $0x$.

У2: Что надо найти в задаче?

О2: Расстояние от точки касания до начала координат.

У3: Составим алгоритм решения.

О3: 1) необходимо найти координату точки касания $\mathrm{M}\ (2; 4)$;

2) найти расстояние: $0\mathrm{M} = 2\sqrt{5}$.

<u>3-й тип задач:</u> «Нахождение точек касания, зная, что касательные к кривым, проходящие через эти точки, параллельны заданным прямым».

Задача 1 (стандартная).

К графику функции $y = \frac{x^3}{3} + x^2 + \frac{7}{3}$ проведена касательная, параллельная прямой $y = -x$. Найти сумму координат точки касания.

Учащийся выполняет у доски, остальные учащиеся самостоятельно.

Задача 1 (творческая).

К графику функции $y = x^4 - 3x$ проведена касательная, параллельная прямой $y = 29x + 1$. Найдите произведение координат точки касания (x_0, y_0).

У1: О каких элементах идет речь в задаче?

О1: О заданной функции, о проведенной к ней касательной, о прямой, которая параллельна касательной.

У2: Что необходимо найти в задаче?

О2: Найти координаты точки касания, а потом произведение координат.

У3: Чем будем пользоваться при решении задачи?

О3: 1) понятием геометрического смысла производной $y'\,(x_0) = k$;

2) параллельность касательной и прямой $y = 29x + 1$означает равенство их угловых коэффициентов, т.е. $y'\,(x_0) = 29 = k$.

У4: Каков будет алгоритм решения?

О4: 1) найти $y'\,(x_0) = 4x^3 - 3 = 29$;

2) решить уравнение относительно x_0, найти y_0, найти их произведение.

4 тип задач: «Составление уравнения касательных к графику функции, проходящих через данную точку, которая не является точкой касания».

Задача 1.

Учащийся у доски совместно с учителем и остальным классом вырабатывает алгоритм решения.

Составить уравнение касательной к графику функции $f(x) = x^2 - 4x + 3$, проходящей через точку $B(2;5)$.

У1: О каких элементах идет речь в задаче?

О1: Задана функция и известны координаты точки, через которую проходит касательная.

У2: Что важно заметить?

О2: Что заданная точка не принадлежит графику функции.

У3: Что надо найти в задаче?

О3: Составить уравнение касательной.

У4: Что для этого надо обязательно знать?

О4: Абсциссу точки касания.

У5: Чем будем пользоваться при решении задачи?

О5: 1) понятием геометрического смысла производной $k = f'(x_0) = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$, где $\mathrm{A}(x_0; y_0)$и $B(2;5) = (x_1; y_1)$.

2) находим точки касания $x_0 = 0$ или $x_0 = 4$.

При $x_0 = 0$ составляем уравнение одной касательной $y = -4x + 3$.

При $x_0 = 4$ составляем уравнение другой касательной $y = 4x - 13$.

IV этап. Контрольно-оценочный

Цель: Выработать самостоятельны перенос сформированного алгоритма решения нескольких типов задач в несильно и сильно изменных исловиях.

Учащимся предлагается дифференцированная самостоятельная работа (Приложение 1), уровень сложности выбирается каждым учащися самостоятельно.

В зависимости от того, какой уровень был выбран учащимся, оценивание производится следующим образом:

Уровень 1 – максимальная отметка 7 баллов;

Уровень 2 – максимальная отметка 10 баллов;

V. Контрольно-коррекционный этап (Приложение 2). Учитель сообщает информацию о домашнем задании: на доске записано условие задачи 4-го типа (творческий уровень), которое учащиеся записывают в тетрадь.

Через точку $\mathrm{A}(2; -10)$ проходят две касательные к графику функции$y = 2x^2 - 8x$. Найти площадь треугольника, образованного этими касательными с осью абсцисс.

1 уровень:

1. Найти значение производной функции $f(x) = -x^2 + 0{,}1x$в точке $x_0 = -2$

2. Найти тангенс угла наклона касательной к графику функции $f(x) = x^2 + 2x$ в точке $B(5; 4)$

3. Составить уравнение касательной к графику функции $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 5$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$.

4. Составить уравнение касательной, проведенной к графику функции $f(x) = -x^2 + 4$ параллельно прямой $y = -2x + 8$.

2 уровень:

1. Прямая $y = -5x + 4$ является касательной к графику функции $f(x) = -x^3 + x^2 - \log_2 17$ в некоторой точке (или нескольких точках). Найти абсциссу точки касания (абсциссы, если точек несколько).

2. Составить уравнение касательной, проведенной к графику функции $f(x) = -x^2 + 4$ параллельно прямой $y = -2x + 8$.

3. Дана функция $f(x) = x \cdot (x - 2) + 3$. Найти значение аргумента, при котором касательная к графику функции составляет $45°$ с положительным направлением оси абсцисс.

4. Прямая $y = 2x + 5$ параллельна касательной к графику функции $f(x) = x^2 - 3x + 8$. Найти абсциссу точки касания.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Лист оценивания знаний				
Тема урока				
Фамилия, имя ученика				
Проверяемые навыки	***Наличие***		***Ученик***	***Учитель***
	Да	***Нет***		
Знаю понятие геометрического смысла производной				
Умею составить уравнение касательной к графику функции в точке x_0				
Умею классифицировать задачи по типам				
Знаю алгоритм решения 1-го типа задач, умею его применять				
Знаю алгоритм решения 2-го типа задач, умею его применять				
Знаю алгоритм решения 3-го типа задач, умею его применять				
Знаю алгоритм решения 4-го типа задач, умею его применять				