Глава «Начальные понятия геометрии»

О. В. Кравчук,
учитель математики первой категории
гимназия № 2 г. Новополоцка

Немного из истории

Геометрия — одна из древнейших наук, она возникла давно, еще до нашей эры. Первое сочинение, содержащее простейшие геометрические сведения, дошло до нас из Древнего Египта. Оно относится к 17 веку до н.э. В нем содержатся правила вычисления площадей и объемов некоторых фигур и тел. Эти правила были получены практическим путем, без какого-либо логического доказательства их справедливости.

Становление геометрии как математической науки произошло позднее и связано с именами греческих ученых Фалеса (около 625-547 гг. до н.э.), Пифагора (около 580-500 гг. до н.э.), Демокрита (около 460-370 гг. до н.э.), Евклида (3 в. до н.э.) и других замечательных ученых.

Наука располагает очень скудными биографическими сведениями о жизни и деятельности Евклида. Известно, что он родом из Афин, был учеником Платона. По приглашению Птолемея I Сотера переехал в Александрию и там организовал математическую школу. К III веку до нашей эры в Греции накопился большой богатый геометрический материал, который необходимо было привести в стройную логическую систему. Эту колоссальную работу и выполнил Евклид. Он написал 13 книг «Начал» (геометрии), которые не утратили своего значения и в настоящее время. Евклид не только систематизировал тот геометрический материал, который был известен до него, но и дополнил его своими собственными исследованиями.

Значение «Начал» Евклида в истории математической науки трудно переоценить. «Начала» Евклида составили целую эпоху в развитии элементарной геометрии. В течение долгих веков «Начала» были чуть ли не единственной учебной книгой, по которой молодые люди изучали геометрию, и не по тому, что других книг не было. Эти книги были, но они вытеснялись «Началами» Евклида и вскоре забывались.

В знаменитом сочинении Евклида «Начала» были систематизированы основные известные в то время геометрические сведения. Главное же – в этом труде был использован аксиоматический подход к построению геометрии, который состоит в том, что сначала формулируются аксиомы, а затем на их основе доказываются другие утверждения, то есть теоремы. Некоторые из аксиом, предложенных Евклидом, и сейчас используются в курсах геометрии.

К наиболее достоверным сведениям о жизни Евклида принято относить то немногое, что приводится в Комментариях Прокла к первой книге Начал Евклида. Отметив, что «писавшие по истории математики» не довели изложение развития этой науки до времени Евклида, Прокл указывает, что Евклид был старше Платоновского кружка, но моложе Архимеда и Эратосфена и «жил во времена Птолемея I Сотера», «потому что и Архимед, живший при Птолемее Первом, упоминает об Евклиде и, в частности, рассказывает, что Птолемей спросил его, есть ли более короткий путь изучения геометрии, нежели Начала; а тот ответил, что нет царского пути к геометрии».

Дополнительные штрихи к портрету Евклида можно почерпнуть у Паппа и Стобея. Папп сообщает, что Евклид был мягок и любезен со всеми, кто мог хотя в малейшей степени способствовать развитию математических наук, а Стобей передаёт ещё один анекдот о Евклиде.

Приступив к изучению геометрии и разобрав первую теорему, один юноша спросил у Евклида: «А какая мне будет выгода от этой науки?» Евклид подозвал раба и сказал: «Дай ему три обола, раз он хочет извлекать прибыль из учёбы».

Некоторые современные авторы трактуют утверждение Прокла — Евклид жил во времена Птолемея I Сотера — в том смысле, что Евклид жил при дворе Птолемея и был основателем Александрийского Мусейона. Следует, однако, отметить, что это представление утвердилось в Европе в XVII веке, средневековые же авторы отождествляли Евклида с учеником Сократа философом Евклидом из Мегар. Анонимная арабская рукопись XII века сообщает: Евклид, сын Наукрата, известный под именем «Геометра», ученый старого времени, по своему происхождению грек, по местожительству сириец, родом из Тира…

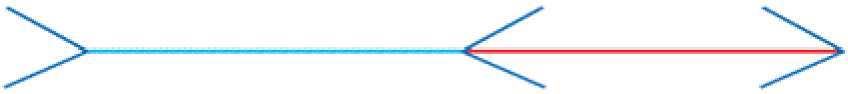
Евклиду приписывают еще два трактата: «Оптика» и «Катоптрика». Из других математических сочинений Евклида надо отметить «О делении фигур», «Канонические сечения».

«Очевидное – невероятное»

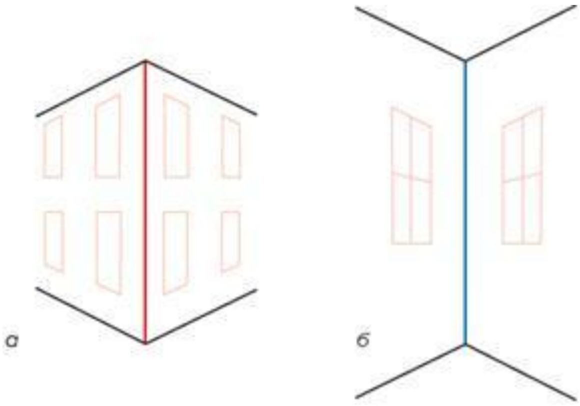
<u>Иллюзия «Отрезки»</u>

1. *Иллюзии искажения восприятия размера.*

Одна из самых известных оптико-геометрических иллюзий — иллюзия Мюллера-Лайера.



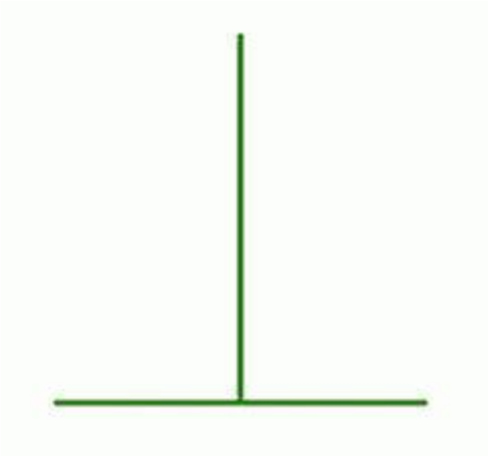
Иллюзия Мюллера-Лайера в повседневной жизни



Нас окружает множество прямоугольных предметов: комнаты, окна, дома, типичные очертания которых можно видеть на рисунке. Поэтому изображение, на котором линии расходятся, можно воспринимать как угол здания, расположенный дальше от наблюдателя, в то время как рисунок, на котором линии сходятся, воспринимается как угол здания, расположенный ближе.

2. *Рассмотрим иллюзию Болдуина искажения восприятия размера*

В приведенных примерах отрезки тоже равны между собой.

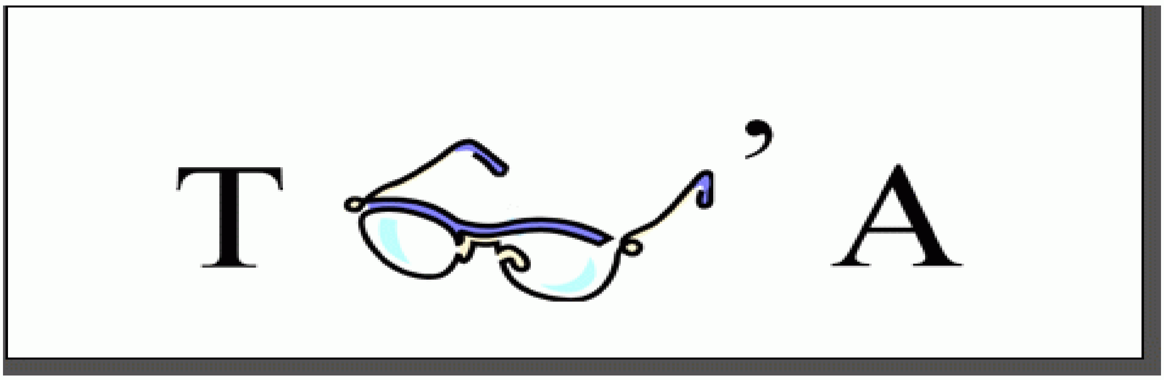


Можно предложить учащимся начертить вертикальную и горизонтальную линии одинаковой длины, и в большинстве случаев начерченные вертикальные линии будут короче горизонтальных

«И в шутку, и в серьез»

<u>Ребусы»</u>

Решите ребус.



Найдите разные виды углов, треугольники, фигуры.

«Скажи мне – и я забуду. Покажи мне – и я запомню, дай мне сделать – и я пойму»

<u>Метапредметная связь с географией, работа с картой</u>

1. Прямоугольный земельный участок изображен на плане в масштабе 1 : 300. Какова площадь земельного участка, если площадь его изображения на плане 18 см^2?
2. Расстояние между двумя пунктами на карте равно 3,8 см. Определите расстояние между этими пунктами на местности, если масштаб карты 1 : 100 000.
3. Найдите масштаб карты, если расстояние между поселками на местности равно 72 км, а расстояние между точками, изображающими эти поселки на карте, равно 7,2 см.
4. Расстояние между двумя городами на местности равно 240 км, соответствующее ему расстояние на первой карте – 3,2 см. Найдите:

а) масштаб первой карты;

б) расстояние между этими городами на второй карте, масштаб которой равен 1 : 6 000 000.

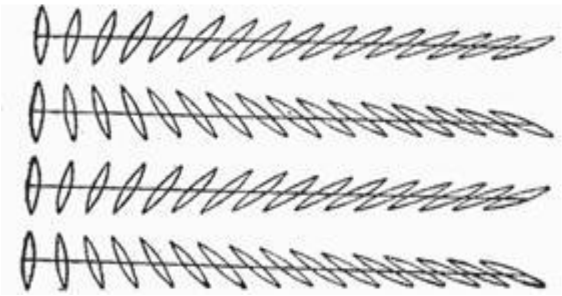
Глава «Параллельность прямых на плоскости»

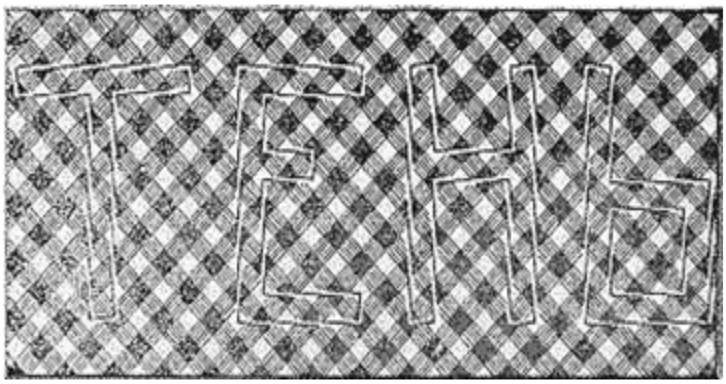
Иллюзия «Параллельных прямых»

Интересный факт: параллельные прямые могут пересечься. Пускай не физически, но в нашем сознании. Если взглянуть на параллельные прямые из плоскости перпендикулярной им, то глазу будет казаться, что в какой-то отдаленной точке они пересекаются.

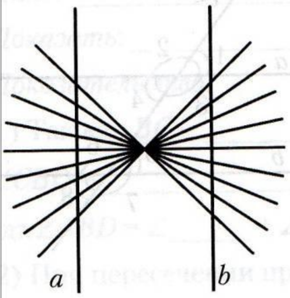
Иллюзия Перельмана. На заполненном клетками фоне буквы кажутся наклонными. Но… Буквы на самом деле параллельны друг другу.

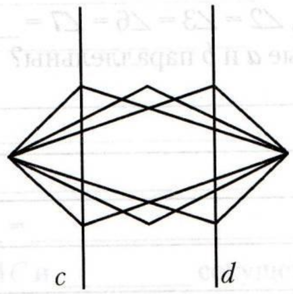
Несмотря на то что на каждом из рисунков кажется, что линии не параллельны, оказалось, что параллельность для прямых выполняется! А значит, в геометрии при решении задач нельзя опираться только чертеж, надо все свои высказывания подтверждать свойствами, аксиомами, теоремами, доказывать! Большая часть обманов зрения зависит исключительно от того, что мы не только видим, но и бессознательно рассуждаем, причём невольно вводим себя в заблуждение.

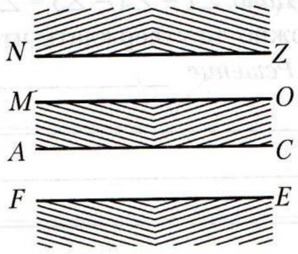




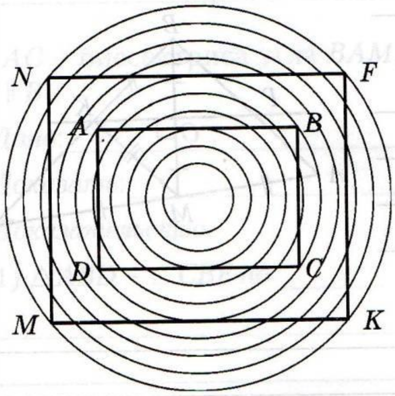
Определите, являются ли прямые параллельными.







. Определите на глаз и запишите, какие прямые или отрезки на чертежах параллельны



Ответ: ____

____

____

____

Практикум «Параллельные прямые»

<u>Задание.</u> Найдите параллельные прямые.


Отец солдата

Сказки «Параллельные прямые»

Параллельные прямые

Жили-были в Геометрии две Прямые a и b. Они очень дружили. Как-то захотели поиграть, но не смогли встретиться и заплакали.

Рядом с ними гуляла Аксиома. Услышав плачь, она прибежала и спросила:

— Почему вы плачете?

— Мы плачем, — ответила Прямая a, — потому что хотим играть вместе, но у нас не получается встретиться.

— Ты можешь нам помочь? — спросила прямая b.

Аксиома отвечала:

— Помочь я вам не смогу. Но я могу вам сказать, почему вы не можете встретится.

— Почему?

— Слышала я, что есть в Геометрии закон: параллельные прямые не пересекаются на плоскости. Возможно, вы и есть — параллельные прямые.

Прямые очень разочаровались, но b сказала:

— Ничего, существуют на свете такие игры, в которые можно играть на расстоянии.

С тех пор параллельные прямые всегда идут рядом, но никогда не пересекаются.

Параллельные прямые

Жили-были в царстве Науки две сестры-близняшки прямые. Жили они очень дружно. Но случилось так, что сестренки поругались. Одна говорит:

— Сестра, наверное мы с тобой параллельные, раз никогда не пересекаемся? "

—Нет, — сказала в ответ другая, — я думаю, мы не параллельны.

Долго они ссорились. Да еще и соседи им помогали.

— Да вы же не параллельны! Это сразу видно! —говорили диаметры.

— Ни в коем случае! — кричали углы.

Так прошла ни одна неделя. Не переставали спорить Прямые. Ни одна не хотела уступать. В конце концов к ним в гости пришла тетя Линия:

— Нужно вам сходить к мудрейшей царице Геометрии. Она вам поможет.

Собрались сестры в дорогу. Дойдя до столицы Науки города Математики, рассказали они царице о своей проблеме.

— Есть у меня дети-шестнадцать Аксиом. Они должны вам помочь.

Аксиомы направили прибывших к своим родственницам Теоремам, в соседний замок. Напомнили Теоремы Прямым об их младшей сестре-Прямой, которая параллельна каждой из них. А две прямые на плоскости параллельны третьей.

Вот так и разрешили их спор. С тех пор живут они вместе счастливо.

Тут и сказке конец, а кто математику любит, тот молодец!

Глава «Сумма углов треугольника»

Подбор эпиграфов к урокам

1. Высшее назначение математики… состоит в том, чтобы находить скрытый порядок в хаосе, который нас окружает.

Н. Винер

2. Знает даже и дошкольник,
Что такое треугольник,
А уж вам-то как не знать.
Но совсем другое дело –
Быстро, точно и умело
В треугольнике считать:
В нём есть стороны, их три,
И углов во всех по три,
И вершин конечно три.
Если длины всех сторон
Мы сложением найдём,
То к периметру придём.
Ну а сумма всех углов
В треугольнике любом
Связана одним числом.

3. Треугольник есть первая фигура, которая не может разложиться в другой вид более простой фигуры (между тем как, наоборот, четырехугольник разлагается на треугольники), и поэтому есть первый фундамент всякой вещи, имеющей границу и фигуру.

Д. Бруно

4. Из истории. Единицы измерения углов.

Градусное измерение углов возникло в Древнем Вавилоне задолго до новой эры. Жрецы считали, что свой дневной путь Солнце совершает за 180 «шагов», и, значит, один «шаг» равен 1/180 развернутого угла. В Вавилоне была принята шестидесятиричная система счисления, т. е. фактически числа записывались в виде суммы степеней числа 60, а не 10, как это принято в нашей десятеричной системе. Естественно поэтому, что для введения более мелких единиц измерения углов один «шаг» последовательно делился на 60 частей.

Лабораторно-практическая работа

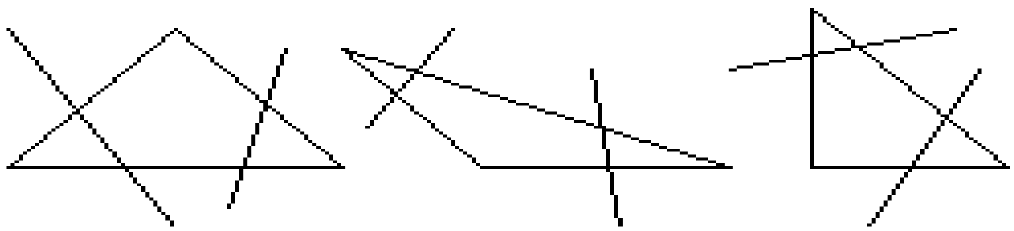
Тема. *Сумма углов треугольника.*

Цели: доказать теорему о сумме углов треугольника, проверить доказательство опытным путем на примере треугольников различного вида.

Оборудование: модели, чертежи.

Ход работы:

1. Рассмотрите модели треугольников:



остроугольный тупоугольный прямоугольный
треугольник треугольник треугольник

2. Пронумеруйте углы каждого треугольника, разрежьте модели треугольников по линиям, как показано на рисунке.

3. Сложите части каждого треугольника вдоль линейки так, чтобы вершины трех углов сходились в одной точке. Получаем ………

………………………. угол, градусная мера которого равна …….

4.Что можно сказать о сумме углов треугольников?

Сделайте **вывод**:……………………………………………………..

……………………………………………………………………..

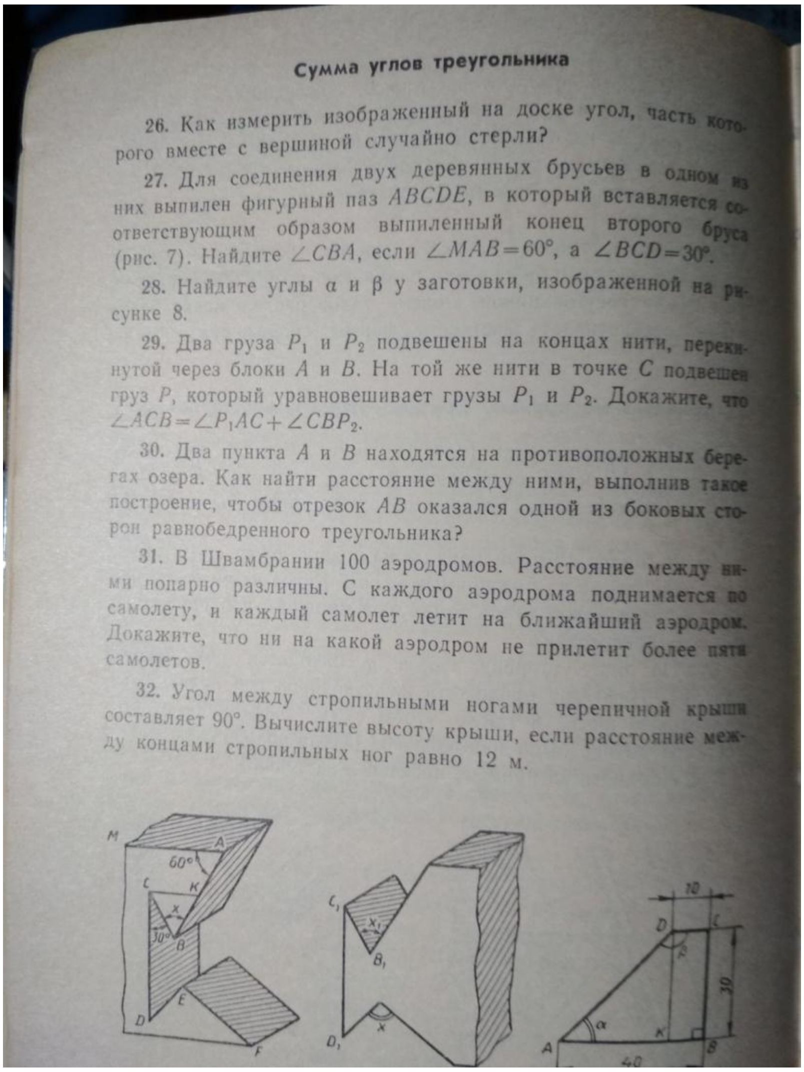
«Верю – не верю»

15. Отметьте знаком «+» правильные утверждения и знаком «–» – ошибочные.

Через точку, не лежащую на данной прямой, проходят только две прямые, параллельные данной.	
Внешним углом треугольника при данной вершине называется угол, смежный с внутренним углом треугольника.	
К каждому внутреннему углу треугольника можно построить сколько угодно внешних углов.	
Если две параллельные прямые пересечены секущей, то внутренние накрест лежащие углы равны.	
Существуют треугольники, в которых два прямых угла и один тупой.	
В любом треугольнике против большего угла лежит меньшая сторона.	
Если прямая пересекает одну из двух параллельных прямых, то она пересекает и другую.	
В любом равностороннем треугольнике все углы равны по 60°.	
Если две прямые параллельны третьей, то они перпендикулярны между собой.	
Если две параллельные прямые пересечены секущей, то соответственные углы в сумме дают 180°.	

Практико-ориентированные задачи

С.С. Варданян. Задачи по планиметрии с практическим содержанием по теме «Сумма углов треугольника».



Сумма углов треугольника

26. Как измерить изображенный на доске угол, часть которого вместе с вершиной случайно стерли?

27. Для соединения двух деревянных брусьев в одном из них выпилен фигурный паз $ABCDE$, в который вставляется соответствующим образом выпиленный конец второго бруса (рис. 7). Найдите $\angle CBA$, если $\angle MAB = 60°$, а $\angle BCD = 30°$.

28. Найдите углы α и β у заготовки, изображенной на рисунке 8.

29. Два груза P_1 и P_2 подвешены на концах нити, перекинутой через блоки A и B. На той же нити в точке C подвешен груз P, который уравновешивает грузы P_1 и P_2. Докажите, что $\angle ACB = \angle P_1AC + \angle CBP_2$.

30. Два пункта A и B находятся на противоположных берегах озера. Как найти расстояние между ними, выполнив такое построение, чтобы отрезок AB оказался одной из боковых сторон равнобедренного треугольника?

31. В Швамбрании 100 аэродромов. Расстояние между ними попарно различны. С каждого аэродрома поднимается по самолету, и каждый самолет летит на ближайший аэродром. Докажите, что ни на какой аэродром не прилетит более пяти самолетов.

32. Угол между стропильными ногами черепичной крыши составляет 90°. Вычислите высоту крыши, если расстояние между концами стропильных ног равно 12 м.

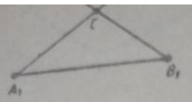


Рис. 2

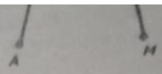


Рис. 3

Рис. 4

16. От пункта A, расположенного на берегу, к пункту B, лежащему на острове, требуется провести телефонную связь. Как, не переплывая на остров, определить необходимое количество (длину) телефонного кабеля? Какой признак равенства треугольников здесь можно использовать? (Пункты A и B расположены на берегах, а кабель прокладывается по дну реки, т. е. условно ищем длину отрезка AB.)

17. Если между точками A и B имеется препятствие, то расстояние AB можно найти следующим образом (рис. 2). Выбрать точку C, из которой видны точки A и B, и провести прямые AC и BC. Отложить $CA_1=CA$, $CB_1=CB$. Расстояние A_1B_1 будет равно искомому расстоянию AB. Докажите это.

18. Из пунктов A и M, расстояние между которыми известно, требуется прорубить просеки в направлениях AB и MN (рис. 3). Вычислите длину каждой просеки до точки их пересечения. Какой признак равенства треугольников здесь можно использовать?

19. Для определения расстояния от точки B до недоступной точки A провешивают произвольную прямую BC, измеряют $\angle ABC$ и $\angle BCA$ и, построив их по другую сторону от прямой BC, провешивают прямые BD и CD (рис. 4). Докажите, что расстояние BD равно искомому расстоянию AB.

20. В школьной мастерской сделайте из проволоки четыре стержня длиной 4, 7, 10 и 13 см. Соединяя концами три стержня из четырех, выясните, из каких трех стержней можно составить треугольник, а из каких нельзя. Объясните ваши выводы.